23980

RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI.

KNJIGA 221.

RAZREDA MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNOGA

64.

(Doštampano 15. januara 1920.)

CIJENA K 6·—

U ZAGREBU 1919.

KNJIŽARA JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE LAV. HARTMANA (STJ. KUGLI.)

TISAK NADBISKUPSKE TISKARE.

Sadržaj.

Strana

Dr. Juraj Majcen: Prilog za geometrijsko određenje „projektivne srodnosti“ (S 1 crtežem) 1

Dr. Stjepan Mohorovičić: O izračunavanju karakterističkih vrijednosti i karakterističkih pridruženih funkcija nesimetričke jezgre u dvije vrlo općene zgode . . 7

Dr. Andro Gilić: Dnevni tok relativne vlage za Bucheben (1899,—1910.), Tragöß (1899., 1901.—1908.) i Kremsmünster (1904.—1910.) (S 8 tabla i 2 karte) 26

Dr. V. Varićak: O transversalnom Dopplerovu učinku . 47

Dr. V. Varićak: Bilješka o relativističkoj dinamici . . . 54

Dr. Ivan Arnovljević: Polarne otporne linije oslonaca kod lučnog nosača sa dva zglavka (S 13 slika) . . . 57

Др. Иван Ђаја: Основна биолошка енергија и енергетика кваса 91

Dr. M. Kiseljak: Neke metričke relacije kod krivulja u ravnini 107

Dr. M. Kiseljak: O Pitagorinim trokutima 116

V. Dvořák: Prinosi za teoriju hidrodinamike 124

Др. Сима М. Марковић: О једначини $y'^2+y^2=\omega(x)$. 140

Prilog za geometrijsko određenje „projektivne srodnosti“.

(S 1 crtežem.)

Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti od 26. marta 1919.

Bilješka pr. čl. dra. Jurja Majcena.

Projektivna se srodnost za elementarne tvorevine u ravnini udešava ili dokazom, da postoji jednakost dvoomjerâ korespondentnih elemenata, ili se izvodi iz perspektivnoga položaja zadanih tvorevina.

Izvod na temelju perspektivnosti može biti izravan, t. j. elementarne se tvorevine dovode u direktni perspektivan položaj, ili pak posredan, gdje se među tvorevine, koje imaju biti projektivne, umeće niz posrednih tvorevina, koje sa zadanim tvorevinama čine lanac perspektivnih srodnosti.

Pogleda li se taj postupak na temelju perspektivnoga položaja izbliže, opazit će se, da je u ravnoj sintetičkoj geometriji i za taj slučaj prikrivena uporaba jednakosti dvoomjera, jer se upravo dvoomjerima mora pokazati, da perspektivnost, a prema tomu i projektivnost postoji, ako hoćemo, da prodremo do posljednjih relacija, na kojima se temelji projektivna srodnost.

Invarijantnost dvoomjera na kojojgod transverzali za četiri čvrste zrake pramena bila je poznata grčkim geometrima (Papus); dokaz se osnivao na metričkim relacijama. Tu su invarijantnost upotrebili noviji osnivači sintetičke geometrije (Poncelet, Steiner, Möbius, Staudt) za udešenje projektivne srodnosti; Steiner je pače pošao mnogo dalje u uporabi metričkih odnosa.

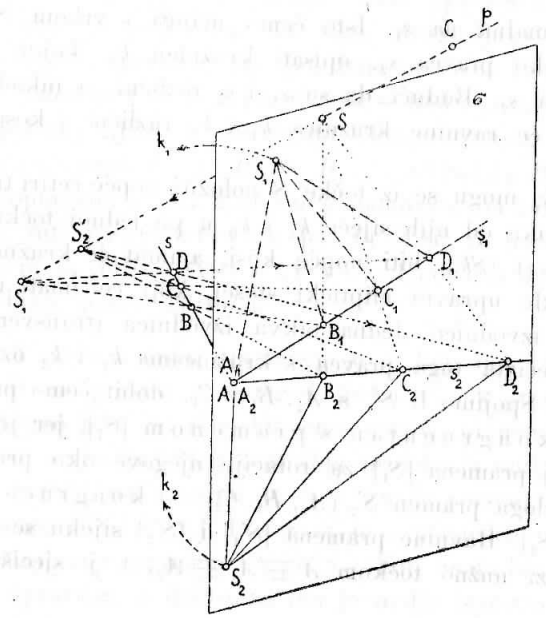
Tako se pokazuje, da odnosi, koji se zovu projektivni, t. j. slobodni od metričkih relacija, imaju svoj izvor u dvoomjerima, koji se mogu izvesti samo metričkim pomagalima! Uvođenje harmoničkih grupa nije ništa pomoglo, da se taj paradoks ukloni, jer je harmoničnost samo na najjednostavniji oblik svedena metrika dvoomjera (Staudt, Reye).

No niti posredovanjem perspektivnih položaja ne može se metrika dvoomjera posve obići; to je posredovanje dostatno za dalju izgradnju projektivnih srodnosti, no utvrđenje za valjanost postupka u prvim konsekvencijama vodi opet do upotrebe dvoomjera. J. Thomae, koji je prvi poradio u tome smjeru, nije mogao utjecaj metrike potpuno ukloniti, baš kao ni G. Kober, koji se za njim poveo.[1])

Ima li se dakle na pr. izvesti način, da se dva pramena u ravnini dovedu u projektivnu srodnost, morat će se nastojati, da se od metričkog određenja upotrebi tako malo, kao što je samo moguće. Ovdje će se pokazati jedan način, kojim se to može postići. Kod toga se ne radi o perspektivnim položajima u ravnini, koji dovode temeljne tvorevine u nove metrički deformirane oblike projiciranjem ili sječenjem, nego se pridržaje kongruentnost sa zadanim tvorevinama, koje se stavljaju u izravni perspektivni odnos izvan ravnine. Kao što se poznati Desargues-ov teorem o perspektivnim trokutima ne dokazuje u ravnini bez metrike, nego se upotrebljava prijelaz u prostorne položaje onih trokuta, tako se i određenje projektivne srodnosti u ravnini može prenijeti u prostor, pa zato upotrebiti — kao što je rečeno — najpotrebniji minimum metričkih relacija. Opazit će se, da je za tu svrhu dovoljna rotacija točke oko pravca, dakle metrički proces, koji je sigurno manje kompliciran od računanja s kutovima i dužinama, kao u slučaju izvođenja projektivnih srodnosti na temelju dvoomjerâ.

U ravnini konstrukcijâ σ neka budu zadana dva pramena S_1 $(A_1, B_1, C_1, \ldots)$, S_2 $(A_2, B_2, C_2, \ldots)$; gl. sliku.

[1]) *Die Grundgebilde der neueren Geometrie*, Hannover 1898., I. dio.



Sjecištem kojegagod korespondentnoga para zraka, na pr. točkom $A_1 \equiv A_2$ povući će se kojagod dva pravca s_1 i s_2. Prvi pravac siječe pramen $[S_1]$ u nizu $A_1, B_1, C_1, \ldots$, a drugi pravac određuje s drugim pramenom $[S_2]$ presječni niz $A_2, B_2, C_2, \ldots$. Kod nadopunjivanja pramenâ $[S_1]$ i $[S_2]$, koji imaju biti projektivni, kaže se, da su nizovi na s_1 i s_2 perspektivni, pa da će zato imati perspektivno središte S, t. j. sjecište pravaca $B_1 B_2$ i $C_1 C_2$, kojim se svaki dalji par točaka D_1, D_2 na s_1 i s_2, a prema tome i svaki pripadni par d_1, d_2 zrakâ u $[S_1]$ i $[S_2]$ jednoznačno određuje. Da je taj postupak ispravan, može se samo tako dokazati (ako ostajemo u konstruktivnoj ravnini σ), da se pokaže jednakost dvoomjerâ $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$. Istom iz te jednakosti izlazi, da će i spojnica para D_1, D_2 prolaziti perspektivnim središtem S.

Dokaz o jednakosti dvoomjera otpada, ako prijeđemo iz ravnine σ u prostor. Uzmimo, da su povučeni pravci s_1 i s_2, pa da je određena točka S pomenutim načinom, no samo u čisto konstruktivnom pogledu bez obzira na osobito njezino značenje. Vrh S_1 prvoga pramena zaokrenut ćemo iz σ u prostor tako, da ga rotiramo oko pravca s_1. Točka će S_1 opisati kružnicu k_1, kojoj je

ravnina normalna na s_1. Isto ćemo učiniti s vrhom S_2; taj će, zaokrenut oko pravca s_2, opisati kružnicu k_2, kojoj je ravnina normalna na s_2. Budući da su s_1 i s_2 različni (a nikad identični) pravci, bit će ravnine kružnicâ k_1 i k_2 različne i koso položene.

Na k_1 i k_2 mogu se iz točke S položiti uopće četiri transverzale tako, da svaka od njih siječe k_1 i k_2 u po jednoj točki. Stošci će naime (Sk_1) i (Sk_2) biti uopće kosi, a imat će kružne osnovke; oni su dakle upravni eliptički stošci, koji će imati uopće četiri zajedničke izvodnice. Jedna takva izvodnica (transverzala) neka bude p. Sjecišta toga pravca s kružnicama k_1 i k_2 označit ćemo s S'_1 i S'_2. Spojimo li S'_1 s A_1, B_1 i C_1, dobit ćemo pramen $[S'_1]$, koji je kongruentan s pramenom $[S_1]$, jer je $[S'_1]$ samo nov položaj pramena $[S_1]$ za rotacije njegove oko pravca s_1. Iz istih je razloga pramen S'_2 $(A_2, B_2, C_2 \ldots)$ kongruentan s pramenom $[S_2]$. Ravnine pramenâ $[S'_1]$ i $[S'_2]$ sijeku se u pravcu s, koji prolazi nužno točkom $A \equiv A_1 \equiv A_2$, t. j. sjecištem pravaca s_1 i s_2.

Položimo pravcem p i zrakom SB_1B_2 ravninu; u toj će ravnini biti obje zrake S'_1B_1 i S'_2B_2, a osim toga je prva u ravnini pramena $[S'_1]$, druga u ravnini pramena $[S'_2]$. Te će se dakle zrake sjeći nužno na presječnici s ravninâ obadvaju pramena, i to u nekoj točki B. Položimo li opet pravcem p i zrakom SC_1C_2 ravninu, doći ćemo istim putem do neke točke C na s. Budući dakle da prameni $[S'_1]$ i $[S'_2]$ projiciraju iste tri točke A, B, C na s, dovedeni su zadani prameni izravno u perspektivni položaj. Naglasujem, da su $[S'_1]$ i $[S'_2]$ isti oni prameni, koji su zadani, poradi kongruencijâ $[S'_1] \cong [S_1]$ i $[S'_2] \cong [S_2]$, samo je njihov položaj prema ravnini σ neki drugi.

Položimo li dalje kroz p kojugod ravninu δ, koja s siječe u točki D, a onda projiciramo D iz S'_1 na s_1 u točku D_1, pa iz S'_2 na s_2 u točku D_2, bit će D_1D_2 nužno pravac, koji prolazi točkom S, jer je on trag ravnine δ na ravnini σ. Zato će pak S_1D_1 i S_2D_2 biti u zadanim projektivnim pramenima dvije korespondentne zrake.

Projektivitet se definira kao srodnost dviju tvorevina, kojima su elementi jednoznačno pridijeljeni u oba smisla; to pridjeljenje izlazi iz početnoga perspektivnoga položaja, iz kojega su obje tvorevine razmaknute, tako da postaju samo „projektivno“ srodne. Izvođenje, koje je prikazano na slici, zadovoljava potpuno tu definiciju. Dva su perspektivno položena pramena $[S'_1]$ i $[S'_2]$ pomaknuta u položaje $[S_1]$ i $[S_2]$ u σ, a da se kod toga nije promijenio relativan položaj njihovih elemenata (kongruencija). Sigurno je dakle, da će prameni S_1 $(A_1, B_1, C_1, D_1 \ldots)$ i S_2 $(A_2, B_2, C_2, D_2 \ldots)$ ako ih nadopunimo onako, kao što je pokazano za korespondentni par D_1, D_2, biti projektivni, jer su izišli iz položaja $[S'_1]$ i $[S'_2]$, u kojem su bili perspektivni. Upotreba dvoomjera pokazuje se dakle posve zališnom.

Jasna je i sveza s onim pramenom u σ, koji ima vrh u točki S. Izaberemo li na pravcu p kojugod točku C, pa pramene $[S'_1]$ i $[S'_2]$ projiciramo iz C na σ, dobit ćemo upravo pramen $[S]$; taj je dakle pramen zajednička centralna projekcija onih dvaju pramena $[S'_1]$ i $[S'_2]$ na ravninu σ, koji znače perspektivni položaj zadanih pramena $[S_1]$ i $[S_2]$. Postupak je s perspektivnim centrom S za nadopunjivanje pramena $[S_1]$ i $[S_2]$, koji imaju biti projektivni u σ, posve opravdan, a dokazana mu je ovdje ispravnost bez uporabe dvoomjera.

Uzme li se mjesto upotrebljene transverzale p za stošce Sk_1 i Sk_2 druga koja od tri još moguće transverzale, dobit će se isti pomoćni pramen $S(A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots)$; određenje je dakle jednoznačno. Da ta jednoznačnost ostaje netaknuta i onda, ako se mjesto s_1 i s_2 kroz $A_1 \equiv A_2$ izaberu druga koja dva pravca, jasno je po sebi, jer će se na prikazanom putu uvesti opet samo nov perspektivni položaj istih pramena, koji su zadani.

Budući da se izborom pravaca s_1 i s_2 može učiniti ∞^2 kombinacija za njihove položaje, imat ćemo u ravnini σ uopće ∞^2 točaka S, koje mogu biti „perspektivna središta“ za zadane projektivne pramene. Kako pak svaka točka u σ dovodi do 4 moguća perspektivna položaja zadanih pramena, vidi se, da se dva projektivna pramena u σ mogu dovesti na $4\infty^2$ načina u perspektivan položaj u prostoru. To znači, da se dva projektivna pramena mogu nadopuniti na $4\infty^2$ načina, koji vode do istoga cilja.

Iz prikazanoga se postupka razabira i to, da su tri para zraka upravo dovoljna, da se dva pramena u ravnini σ učine projektivnima. Taj je naime broj upravo potreban, da se odrede četiri transverzale kroz točku S; dvije korespondentne zrake određuju

točku A u σ, a ostala dva para dostaju za niz A, B, C na s, koji udešava perspektivni položaj $[S'_1] \overline{\wedge} [S'_2]$.

Izvođenje za projektivnost dvaju nizova istim načinom, koji je prikazan za pramene, može se doduše udesiti, no postupak nije tako jednostavan, kao kod pramenâ, jer se prikazana konstrukcija pramenâ $[S'_1]$ i $[S'_2]$ ne može u prostoru dualizirati za svrhe centralne projekcije na ravninu σ zadanih nizova. Posebno izvođenje nije u ostalom ni nužno, jer se dualiziranjem u ravnini σ dolazi do ispravnoga postupka, čim je određenje projektivnih p r a m e n a dokazano. Utvrđen postupak za pramene može se dalje upotrebiti za projektivnost svih ravnih i prostornih sistema, koji se imaju učiniti srodnima.

O izračunavanju karakterističkih vrijednosti i karakterističkih pridruženih funkcija nesimetričke jezgre u dvije vrlo općene zgode.

Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 26. marta 1919.

Napisao dr. Stjepan Mohorovičić.

1. Ako je $F(s, t)$ nesimetrička jezgra, tada za svaku karakterističku vrijednost (Eigenwert) λ_μ postoji sistem pridruženih (adjungiranih) karakterističkih funkcija $\varphi_\mu(s)$ i $\psi_\mu(s)$, koje zadovoljuju homogene integralne jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\mu(s) &= \lambda_\mu \int_a^b F(s, t)\, \psi_\mu(t)\, dt\,, \qquad (1)_1 \\ \psi_\mu(s) &= \lambda_\mu \int_a^b F(t, s)\, \varphi_\mu(t)\, dt\,. \qquad (1)_2 \end{aligned}\right\}$$

Poznato je, da se $\varphi_\mu(s)$ zovu karakterističkim funkcijama prve vrste, a $\psi_\mu(s)$ karakterističkim funkcijama druge vrste; za njih ćemo pretpostaviti, da su uređene (normirane) i ortogonalne, t. j. da postoje relacije:

$$\int_a^b \varphi_\mu(s)\, \varphi_{\mu_1}(s)\, ds = \begin{cases} 0, \text{ ako } \mu \neq \mu', \\ 1, \quad \text{„} \quad \mu = \mu'. \end{cases} \qquad (2)'$$

$$\int_a^b \psi_\mu(s)\, \psi_{\mu'}(s)\, ds = \begin{cases} 0, \text{ ako } \mu \neq \mu', \\ 1, \quad \text{„} \quad \mu = \mu'. \end{cases} \qquad (2)_2$$

Uvrstimo li $(1)_2$ u $(1)_1$, i obratno, izlazi, da spomenute pridružene karakterističke funkcije zadovoljuju Hilbertove homogene jednadžbe druge vrste:

$$\varphi_\mu(s) = \lambda_\mu^2 \int_a^b \overline{F}(s,t)\,\varphi_\mu(t)\,dt\,, \qquad (3)_1$$

$$\psi_\mu(s) = \lambda_\mu^2 \int_a^b \underline{F}(s,t)\,\psi_\mu(t)\,dt\,, \qquad (3)_2$$

sa simetričkim jezgrama:

$$\overline{F}(s,t) = \int_a^b F(s,r)\,F(t,r)\,dr\,, \qquad (4)_1$$

$$\underline{F}(s,t) = \int_a^b F(r,s)\,F(r,t)\,dr\,. \qquad (4)_2$$

Konvergira li niz

$$\sum_\mu \frac{\varphi_\mu(s)\,\psi_\mu(t)}{\lambda_\mu}\,,$$

uniformno, tada on predstavlja vrijednost funkcije (jezgre) $F(s,t)$, t. j. bit će[1]):

$$F(s,t) = \sum_\mu \frac{\varphi_\mu(s)\,\psi_\mu(t)}{\lambda_\mu}\,. \qquad (5)$$

Već je Fredholm[2]) riješio homogenu jednadžbu druge vrste; zato ćemo iz (3) moći napisati vrijednosti ovih pridruženih karakterističkih funkcija[3]):

[1]) E. Schmidt: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil. (Math. Ann. 63., 1906.).

[2]) J. Fredholm: Sur une classe d'équations fonctionelles. (Acta math. 27., 1903.).

[3]) Ovdje je:

$$\varphi_\mu(s) = \frac{\varphi_\mu(s)}{\sqrt{\int_a^b \left[\varphi_\mu(s)\right]^2 ds}}\,, \qquad \psi_\mu(s) = \frac{\psi_\mu(s)}{\sqrt{\int_a^b \left[\psi_\mu(s)\right]^2 ds}}\,.$$

$$\overline{\varphi}_\mu(s) = D_{\overline{F}}(\lambda_\mu^2; s, t_0)\,, \qquad (6)_1$$

$$\underline{\psi}_\mu(s) = D_{\underline{F}}(\lambda_\mu^2; s, t_0)\,, \qquad (6)_2$$

gdje ćemo sa D obilježiti poznate Fredholmove nizove. Karakterističke funkcije prve i druge vrste bile bi nam potpuno poznate tek onda, kada bismo poznavali sve karakterističke vrijednosti λ_μ, koje su korijeni Fredholmove determinante

$$D_F(\lambda) = 0\,. \qquad (7)$$

Pošto je Fredholmova determinanta općeno beskonačan konvergentan niz po rastućim potencijama od λ, tada će ona imati u općenom slučaju neizmjerno mnogo korijena λ_μ.

Ovdje ćemo pokazati, kako se mogu ovi korijeni (karakterističke vrijednosti) λ_μ odrediti u dvije vrlo općene zgode nesimetričke jezgre $F(s,t)$.

2. Pretpostavimo najprije, da zadana nesimetrička jezgra $F(s,t)$ ima neizmjerno mnogo karakterističkih vrijednosti λ_μ, i da se dade prikazati u obliku:

$$F(s,t) = \int_o^u K(s+t)\,.\,h(t)\,dt, \qquad (8)$$

U predašnjoj jednoj radnji[1]) pokazao sam, kako po ovoj[2]) integralnoj jednadžbi prve vrste tipa Velterrina, gdje su zadane funkcije $F(s,t)$ i $K(s+t)$ konačne i neprekidne u intervalima (o,s) i (o,t), dolazimo do razvidbe:

$$F(s,t) = \sum_{\nu=o}^{\nu=\infty} \frac{K^{(\nu)}(s)\,.\,b_\nu(t)}{\nu!}\,, \qquad (9)$$

[1]) S. Mohorovičić: Razvijanje makar koje funkcije po derivacijama zadane funkcije. („Rad Jugoslav. akademije u Zagrebu" 1916. Knj. 215. str. 37.).

[2]) Na ovu jednadžbu naišao sam u citiranoj radnji i pokazao njenu primjenu kod rješavanja sistema od neizmjerno mnogo linearnih jednadžbi s neizmjerno mnogo nepoznanicâ. Rješenje ove jednadžbe u slučaju općene jezgre $K(s,t)$ pokazat ću potkraj ove radnje.

gdje je:

$$b_\nu(t) = \int_0^t t^\nu \,.\, h(t)\, dt. \tag{10}$$

Tamo sam ujedno pokazao nužni i dovoljni uvjet, kada se konačna i neprekidna funkcija $F(s, t)$ dade u području $(o, s; o, t)$ predstaviti nizom (2), te sam naglasio, da jednadžba (1) ne će u općenu slučaju imati rješenja, jer karakter funkcije $F(s, t)$ bitno zavisi o karakteru funkcije $K(s+t)$, što ćemo ovdje i vidjeti.

Isporedimo li niz (9) s otprije poznatim (5), imamo:

$$\sum_\mu \frac{\varphi_\mu(s)\,.\,\psi_\mu(t)}{\lambda_\mu} = \sum_\nu \frac{K^{(\nu)}(s)\,.\,b_\nu(t)}{\nu!}, \tag{11}$$

Pomnožimo obje strane $\frac{1}{\varrho!} K^{(\varrho)}(s)\,.\,b_\varrho(t)$ i integrirajmo po s i t u granicama (a, b), tad izlazi:

$$\frac{1}{\varrho!}\sum_\mu \frac{A_{\varrho,\mu}\,.\,C_{\varrho,\mu}}{\lambda_\mu} = \frac{1}{\varrho!}\sum_\nu \frac{K_{\nu,\varrho}\,.\,B_{\nu,\varrho}}{\nu!}, \tag{12}$$

gdje smo uveli prikrate:

$$\left.\begin{aligned} A_{\varrho,\mu} &= \int_a^b K^{(\varrho)}(s)\,.\,\varphi_\mu(s)\, ds, \\ C_{\varrho,\mu} &= \int_a^b b_\varrho(t)\,.\,\psi_\mu(t)\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

te:

$$\left.\begin{aligned} K_{\nu,\varrho} &= \int_a^b K^{(\nu)}(s)\,.\,K^{(\varrho)}(s)\, ds = K_{\varrho,\nu}, \\ B_{\nu,\varrho} &= \int_a^b b_\nu(t)\,.\,b_\varrho(t)\, dt = B_{\varrho,\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Pomnožimo li (11) sa $\varphi_\mu(s)\,.\,\psi_\mu(t)$ i integriramo po s i t u granicama (a, b), dobit ćemo s obzirom na $(2)_1$ i $(2)_2$:

$$\frac{1}{\lambda_\mu} = \sum_\nu \frac{A_{\nu,\mu}\,.\,C_{\nu,\mu}}{\nu!}. \tag{15}$$

Ovdje ćemo obje strane pomnožiti s $\frac{\lambda^\mu}{\lambda_\mu}$ i sumirati preko svih μ, tada će (15) prijeći u:

$$\sum_\mu \frac{\lambda^\mu}{\lambda^2_\mu} = \sum_\mu \sum_\nu \frac{\lambda^\mu}{\lambda_\mu}\,.\,\frac{A_{\nu,\mu}\,.\,C_{\nu,\mu}}{\nu!}. \tag{16}$$

Označimo li s $\lambda^{(\nu)}$, da treba λ^ν samo ondje uzeti kao faktor, gdje se njezin eksponenat podudara sa μ, tada ćemo imati s obzirom na (12):

$$\sum_\nu \frac{\lambda^{(\nu)}}{\nu!}\sum_\mu \frac{A_{\nu,\mu}\,.\,C_{\nu,\mu}}{\lambda_\mu} = \sum_\nu \frac{\lambda^{(\nu)}}{\nu!}\sum_\mu \frac{K_{\mu,\nu}\,.\,B_{\mu,\nu}}{\mu!}, \tag{17}$$

gdje smo pretpostavili, da je nesamo ν već i $\mu = 1, 2, \ldots$, ad inf., t. j. da postoji neizmjerno mnogo karakterističkih vrijednosti $|\lambda_\mu|$, (gdje nekoje mogu biti i međusobno jednake). Radi toga prijeći ćemo opet na obični način pisanja i s obzirom na (16) imati:

$$\sum_\mu \frac{\lambda^\mu}{\lambda^2_\mu} = \sum_\mu \frac{\lambda^\mu}{\mu!}\sum_\nu \frac{K_{\mu,\nu}\,.\,B_{\mu,\nu}}{\nu!}. \tag{18}$$

Pošto ova jednadžba vrijedi za neizmjerno mnogo vrijednosti od λ (sigurno za sve $|\lambda| < 1$), tada moraju i koeficijenti jednakih potencija biti međusobno jednaki, t. j.:

$$\frac{1}{\lambda_{\mu^2}} = \frac{1}{\mu!}\sum_\nu \frac{K_{\mu,\nu}\,.\,B_{\mu,\nu}}{\nu!} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \text{ad inf.}). \tag{19}$$

Ovako smo odredili karakteristične vrijednosti λ_μ s pomoću poznatih funkcija, a iz relacija $(6)_1$ i $(6)_2$ izlazi, da su sada i sve

pridružene karakterističke funkcije $\varphi_\mu(s)$ i $\psi_\mu(s)$ poznate, t. j. dadu se s pomoću poznatih veličina izračunati. Lako se razabere, da će niz na desnoj strani uvijek konvergirati, a uvijek je

$$\lambda_\mu \neq 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, ad\ inf.), \tag{20}_1$$

jer je

$$D(0) \equiv 1. \tag{20}_2$$

Budući da (19) možemo pisati i o obliku:

$$\lambda_\mu = \sqrt{\mu!} \cdot \left\{ \sum_\nu \frac{K_{\mu,\nu} \cdot B_{\mu,\nu}}{\nu!} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots), \tag{19bis}$$

to vidimo, da se karakterističke vrijednosti ne kupe u konačnosti, što je već otprije poznato. No jer niz na desnoj strani konvergira, to ne postoji ni u beskonačnosti nijedna vrijednost, oko koje bi se karakterističke vrijednosti sakupljale.

S obzirom na poučak, što sam ga publicirao u prije citiranoj radnji[1]), možemo izreći ovaj teorem:

Dade li se zadana funkcija $F(s, t)$ u području $(o, s;\ o, t)$ razviti u uniformno konvergentan niz po derivacijama poznate funkcije $K(s)$, tada možemo izračunati sve njene karakterističke vrijednosti (korijene Fredholmove determinante) λ_μ, i to samo onda, ako ih ona ima neizmjerno mnogo.

Bilješka. Još ćemo da pokažemo, u kakovu su odnošaju adjungirane karakterističke funkcije. Uvrstimo razvidbu (9) u $(4)_1$ i uvedimo prikrate otprije poznate. Integriramo li sada $(3)_1$, pošto smo obje strane pomnožili s $\varphi_\mu(s)$, po s u granicama (a, b), dobijemo neposredno:

$$\frac{1}{\lambda_\mu^2} = \sum_\nu \sum_\vartheta \frac{A_{\nu,\mu} \cdot A_{\vartheta,\mu}}{\nu!\,\vartheta!} \cdot B_{\vartheta,\nu}. \tag{21}$$

[1]) l. c., p. 37.

Sličnim postupkom dobili bi iz (9), $(4)_2$ i $(3)_2$, da je:

$$\frac{1}{\lambda_\mu^2} = \sum_\nu \sum_\vartheta \frac{C_{\nu,\mu} \cdot C_{\vartheta,\mu}}{\nu!\,\vartheta!} \cdot K_{\vartheta,\nu}. \tag{22}$$

Isporedimo li posljednje dvije formule, vidimo, da će uvijek biti:

$$\sum_\nu \sum_\vartheta \frac{K_{\vartheta,\nu}}{\nu!\,\vartheta!} \cdot C_{\nu,\mu} \cdot C_{\vartheta,\mu} = \sum_\nu \sum_\vartheta \frac{B_{\vartheta,\nu}}{\nu!\,\vartheta!} \cdot A_{\nu,\mu} \cdot A_{\vartheta,\mu}. \tag{23}$$

Da smo u prvoj zgodi množili jednadžbu $(3)_1$ sa $\varphi_{\mu'}(s)$ i integrirali po s u granicama (a, b), imali bismo s obzirom na $(2)_1$:

$$\sum_\nu \sum_\vartheta \frac{B_{\vartheta,\nu}}{\nu!\,\vartheta!} \cdot A_{\nu,\mu'} \cdot A_{\vartheta,\mu} = 0, \quad (\mu' \neq \mu); \tag{24}$$

isto tako da smo $(3)_2$ pomnožili sa $\psi_{\mu'}(s)$ i integrirali po s u granicama (a, b), imali bismo s obzirom na $(2)_2$:

$$\sum_\nu \sum_\vartheta \frac{K_{\vartheta,\nu}}{\nu!\,\vartheta!} \cdot C_{\nu,\mu'} \cdot C_{\vartheta,\mu} = 0, \quad (\mu' \neq \mu). \tag{25}$$

3. Mi ćemo sada pretpostaviti, da se nesimetrička jezgra $F(s, t)$ dade prikazati u obliku

$$F(s, t) = \int K(s, t)\, h(t)\, dt, \tag{26}$$

gdje integral može biti neodreden ili odreden granicama (c, t), gdje je c neka konstanta; $K(s, t)$ je simetrička jezgra, t. j.:

$$K(s, t) \equiv K(t, s). \tag{27}$$

Poznato je, da simetrička jezgra ima najmanje jednu karakterističku funkciju i karakterističku vrijednost, t. j. homogena Hilbertova jednadžba druge vrste

$$k_\nu(s) = \varkappa_\nu \int_a^b K(s, t)\, k_\nu(t)\, dt, \tag{28}$$

gdje smo sa $\varkappa_\nu$ označili karakterističku vrijednost simetričke jezgre $K(s, t)$, imat će najmanje jedno rješenje $k_\nu(s)$ oblika[1]):

$$k_\nu(s) = D_K(\varkappa_\nu; s, t_0). \tag{29}$$

Još ćemo uzeti, da su nam sve karakteristične funkcije $k_\nu(s)$ i sve karakteristične vrijednosti $\varkappa_\nu$ (korijeni Fredholmove determinante $D_K(\varkappa) = 0$) poznate[2]), i da niz

$$\sum_\nu \frac{k_\nu(s)\, k_\nu(t)}{\varkappa_\nu}$$

uniformno konvergira u cjelom području (a, b). Već smo prije spomenuli, da ovakav niz predstavlja svoju jezgru, t. j. da je:

$$K(s, t) = \sum_\nu \frac{k_\nu(s)\, k_\nu(t)}{\varkappa_\nu}. \tag{30}$$

Uvrstimo ovu vrijednost u jednadžbu (26), tada izlazi:

$$\sum_\mu \frac{\varphi_\mu(s)\, \psi_\mu(t)}{\lambda_\mu} = \sum_\nu \frac{k_\nu(s)\, l_\nu(t)}{\varkappa_\nu}, \tag{31}$$

gdje smo obilježili

$$l_\nu(t) = \int k_\nu(t)\, h(t)\, dt, \tag{32}$$

gdje integral može biti neodređen ili određen granicama (c, t) već prema tome, kako je to u jednadžbi (26).

---

[1]) $k_\nu(s)$ su ortonogalne i uređene, t. j.

$$k_\nu(s) = \frac{\overline{k}_\nu(s)}{\sqrt{\int_a^b [\overline{k}_\nu(s)]^2\, ds}}.$$

[2]) Ovakovih primjera imamo već dovoljno, osobito u teoretskoj fizici. Isporedi na pr. knjigu A. Knesera: Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik. Braunschweig 1911.

Pomnožimo (31) s $\varphi_\mu(s)$ i integrirajmo po s u granicama (a, b), imat ćemo:

$$\frac{\psi_\mu(t)}{\lambda_\mu} = \sum_\nu \frac{l_\nu(t)}{\varkappa_\nu} \int_a^b k_\nu(s)\, \varphi_\mu(s)\, ds, \tag{33}_1$$

a da smo (31) pomnožili sa $\psi_\mu(t)$ i integrirali po t u granicama (a, b):

$$\frac{\varphi_\mu(s)}{\lambda_\mu} = \sum_\nu \frac{k_\nu(s)}{\varkappa_\nu} \int_a^b l_\nu(t)\, \psi_\mu(t)\, dt. \tag{33}_2$$

Za karakteristične funkcije $k_\nu(s)$, koje su ortogonalne, uzet ćemo, da su i uređene (normirane), t. j. one zadovoljuju relacije:

$$\int_a^b k_\nu(s)\, k_{\nu'}(s)\, ds = \begin{cases} 0, & \text{ako } \nu \neq \nu', \\ 1, & \text{„ } \nu = \nu'. \end{cases} \tag{33}$$

Pomnožimo li $(32)_2$ s $k_\nu(s)$, dobit ćemo s obzirom na (38):

$$\frac{\Phi_{\nu,\mu}}{\lambda_\mu} = \frac{\Psi_{\nu,\mu}}{\varkappa_\nu}, \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots), \tag{34}$$

gdje smo uveli prikrate:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\nu,\mu} &= \int_a^b k_\nu(s)\, \varphi_\mu(s)\, ds, \\ \Psi_{\nu,\mu} &= \int_a^b l_\nu(t)\, \psi_\mu(t)\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Uvrstimo u (31) vrijednost za λ_μ iz (34), imat ćemo:

$$\sum_\mu \frac{\varphi_\mu(s)\, \psi_\mu(t)}{\varkappa_\nu} \frac{\Psi_{\nu,\mu}}{\Phi_{\nu,\mu}} = \sum_\nu \frac{k_\nu(s)\, l_\nu(t)}{\varkappa_\nu}. \tag{36}$$

Kvadrirajmo lijeve i desne strane i integrirajmo po s u granicama (a, b), to je s obzirom na $(2)_1$ i (33):

$$\left[\psi_\mu(t)\right]^2 . \Psi^2_{\nu,\mu} = \left[l_\nu(t)\right]^2 . \Phi^2_{\nu,\mu}, \qquad (37)$$

gdje za svako μ postoji jedna vrijednost ν takova, da je ova relacija verificirana. Integriramo li (37) po t u granicama (a, b), imamo s obzirom na $(2)_2$:

$$\Psi^2_{\nu,\mu} = \Phi^2_{\nu,\mu} \cdot \int_a^b \left[l_\nu(t)\right]^2 dt. \qquad (38)$$

Iz (37) i (38) izlaze neposredno vrijednosti svih karakterističkih funkcija druge vrste:

$$\psi_\mu(t) = \frac{l_\nu(t)}{\sqrt{\int_a^b \left[l_\nu(t)\right]^2 dt}}, \qquad (39)$$

a s obzirom na (36) one prve vrste:

$$\varphi_\mu(s) = k_\nu(s), \qquad (40)$$

te konačno i sve karakterističke vrijednosti[1]):

$$\lambda_\mu = \frac{\varkappa_\nu}{\sqrt{\int_a^b \left[l_\nu(t)\right]^2 dt}}. \qquad (41)$$

Iz (39) izlazi s obzirom na $(2)_2$ neposredno uvjet za valjanost nađenih rezultata, koji mora da zadovoljava „rješenje" $h(t)$ jednadžbe (26); on glasi:

$$\int_a^b l_\nu(t) . l_{\nu'}(t)\, dt = 0, \qquad (\nu \neq \nu'). \qquad (42)$$

[1]) Ovaj rezultat (41) mogli smo dobiti i istim postupkom kao u predašnjem razmatranju. Dakako da mjesto vrijednosti $K^{(\nu)}(s)$, $b_\nu(t)$, $\nu!$ i $\mu!$ moramo uvrstiti vrijednosti, koje ovdje dolaze, a to su $k_\nu(s)$, $l_\nu(t)$, $\varkappa_\nu$ i $\varkappa_\mu$. Iz relacije (19bis) dobili bismo tada neposredno traženi rezultat (41). Ovo nam može biti potvrdom valjanosti predašnjeg postupka.

Imamo teorem:

Dade li se nesimetrička jezgra $(F\ s, t)$ prikazati u obliku

$$F(s, t) = \int K(s, t)\, h(t)\, dt,$$

gdje integral može biti neodreden ili određen granicama (c, t), gdje je c neka konstanta, i ako su poznate sve karakterističke vrijednosti $\varkappa_\nu$ i sve karakterističke funkcije $k_\nu(s)$ simetričke jezgre $K(s, t) \equiv K(t, s)$, koja se dade predočiti bilinearnim nizom, tada možemo odrediti i sve karakterističke vrijednosti λ_μ i sve pridružene karakterističke funkcije $\varphi_\mu(s)$ i $\psi_\mu(s)$ nesimetričke jezgre $F(s, t)$, čim je ispunjen uvjet za „rješenje" $h(t)$

$$\int_a^b l_\nu(t) . l_{\nu'}(t)\, dt = 0, \qquad (\nu \neq \nu').$$

Jezgre $K(s, t)$ i $F(s, t)$ imaju ili jednak broj karakterističkih vrijednosti ili ih ima nesimetrička jezgra $F(s, t)$ dva puta toliko koliko simetrička jezgra $K(s, t)$; u tome slučaju su apsolutne vrijednosti od dva i dva korijena λ_μ i dviju i dviju karakterističkih funkcija druge vrste $\psi_\mu(s)$ uvijek međusobno jednake, a razlikuju im se tek predznaci. Karakteristička funkcije prve vrste $\varphi_\mu(s)$ nesimetričke jezgre $F(s, t)$ jesu jednake karakterističkim funkcijama $k_\nu(s)$ simetričke jezgre $K(s, t)$; karakteristička funkcije druge vrste $\psi_\mu(s)$ i karakteristička vrijednosti λ_μ nesimetričke jezgre $F(s, t)$ ovise nesamo o karakterističnim funkcijama $k_\nu(s)$, dotično karakterističkim vrijednostima $\varkappa_\nu$, simetričke jezgre $K(s, t)$, već i o „rješenju" $h(t)$. Dobiveni rezultati bit će valjani onda i samo onda, ako niz

$$\sum_\mu \frac{\varphi_\mu(s)\, \psi_\mu(t)}{\lambda_\mu}$$

bude konvergirao uniformno u promatranom intervalu, jer on tada i samo tada predstavlja vrijednost funkcije $F(s, t)$.

Nuzgredno spominjem, da sada možemo odrediti vrijednosti nekojih konstanta. Iz (35), (39) i (40) izlazi:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\nu,\mu} &= 1, \\ \Psi_{\nu,\mu} &= \sqrt{\int_a^b \left[l_\nu(t)\right]^2 dt}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Opaska. Ovdje pokazat ću, u kakovom su odnošaju još jezgre $F(s, t)$ i $K(s, t) \equiv K(t, s)$. S obzirom na (40) možemo homogenu jednadžbu (28) pisati i u obliku

$$\varphi_\mu(s) = \varkappa_\nu \int_a^b K(s, t)\, \varphi_\mu(t)\, dt, \tag{44}$$

te isporedimo li je s homogenom jednadžbom $(3)_1$, dobijemo neposredno:

$$\int_b^a H_{\mu,\nu}(s, t) \cdot \varphi_\mu(t)\, dt = 0, \tag{45}$$

gdje smo obilježili

$$H_{\mu,\nu}(s, t) = \lambda^2\mu \cdot \overline{F}(s, t) - \varkappa_\nu \cdot K(s, t) = H_{\mu,\nu}(t, s). \tag{46}$$

Jednadžba (45) vrijedi za sve korespondente s μ i ν. Prema Hilbertovoj[1]) definiciji reći ćemo, da simetričke jezgre $H_{\mu,\nu}(s, t)$ nijesu zatvorene (abgeschlossen, fermé). Dakako, ta relacija (45) vrijedi uvijek tek onda, ako su prije spomenuti uvjeti zadovoljeni.

4. Pokazat ćemo ovdje veliku plodnost našega postupka. Ako su nam poznate sve karakterističke vrijednosti i sve karakterističke funkcije neke simetričke jezgre $K(s, t)$, koja se dade prikazati Schmidtovim bilinearnim nizom, tada možemo u općenu slučaju izračunati sve karakterističke vrijednosti i sve pridružene

[1]) D. Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Gott. Nachr. V. Mitt. 1906.).

karakterističke funkcije od neizmjerno mnogo nesimetričkih jezgra $F(s, t)$. S pomoću svake posljednje možemo konstruirati neizmjerno mnogo simetričkih iteriranih jezgra $\overline{F}^{(n)}(s, t)$ i $\underline{F}^{(n)}(s, t)$. Iz $(4)_1$, i (5) izlazi neposredno:

$$\overline{F}(s, t) = \sum_\mu \frac{\varphi_\mu(s)\, \varphi_\mu(t)}{\lambda_\mu^2} = \sum_\nu \frac{k_\nu(s) \cdot k_\nu(t)}{\varkappa_\nu^2 \cdot \left[\int_a^b \left(l_\nu(r)\right)^2 dr\right]^{-1}}, \tag{47}$$

t. j. mi vidimo, da ona ima iste karakterističke funkcije kao i prva iterirana jezgra $K^{(1)}(s, t)$ simetričke jezgre $K(s, t.)$.

Naprotiv iz $(4)_2$ i (5) izlazi:

$$\underline{F}(s, t) = \sum_\mu \frac{\psi_\mu(s)\, \psi_\mu(t)}{\lambda_\mu^2} = \sum_\nu \frac{l_\nu(s)\, l_\nu(t)}{\varkappa_\nu^2}, \tag{48}$$

te vidimo, da će iterirane simetričke jezgre $\overline{F}^{(n)}(s, t)$ i $\underline{F}^{(n)}(s, t)$ imati iste karakterističke vrijednosti λ_μ^{2n+2}. Sada bismo mogli s pomoću simetričkih jezgra $K^{(n)}(s, t)$, $\overline{F}^{(n)}(s, t)$ i $\underline{F}^{(n)}(s, t)$, gdje je $n = 0, 1, 2, \ldots$, ad inf., konstruirati istom metodom nove nesimetričke jezgre i odrediti sve njihove karakterističke vrijednosti i sve adjungirane karakterističke funkcije. Ovaj postupak mogao bi nam biti od velike koristi u matematičkoj fizici kod rješavanja konkretnih primjera. Radi toga, da proširimo ovaj postupak, treba da pokažemo još, kako možemo s pomoću nesimetričke jezgre $F(s, t)$ odrediti sve karakterističke vrijednosti γ_ϑ i sve pridružene karakterističke funkcije $g_\vartheta(s)$ i $\overline{g}_\vartheta(s)$ od neizmjerno mnogo nesimetričkih jezgra $G(s, t)$, koje se dadu predočiti nizom:

$$G(s, t) = \sum_\vartheta \frac{g_\vartheta(s)\, \overline{g}_\vartheta(t)}{\gamma_\vartheta} \tag{49}$$

i oblikom:

$$G(s, t) = \int F(s, t)\, j(t)\, dt, \tag{50}$$

gdje je integral neodređen ili određen granicama (c', t), gdje je c' neka konstanta. S obzirom na (5) i (49) prijeći će (50) u:

$$\sum_{\vartheta} \frac{g_\vartheta(s) \cdot \bar{g}_\vartheta(t)}{\gamma_\vartheta} = \sum_{\mu} \frac{\varphi_\mu(s) \cdot m_\mu(t)}{\lambda_\mu}, \qquad (51)$$

gdje smo obilježili:

$$m_\mu(t) = \int \psi_\mu(t) \cdot j(t)\, dt. \qquad (52)$$

Pošto su po pretpostavci $g_\vartheta(s)$ i $\bar{g}_\vartheta(s)$ normirane i ortogonalne, a jednadžba (51) ima analogan oblik kao i ona (31), možemo istim postupkom kao i prije naći, da je:

$$\left.\begin{aligned} g_\vartheta(s) &= \varphi_\mu(s), \\ \bar{g}_\vartheta(s) &= \frac{m_\mu(s)}{\sqrt{\int_a^b \left[m_\mu(t)\right]^2 dt}}, \\ \gamma_\vartheta &= \frac{\lambda_\mu}{\sqrt{\int_a^b \left[m_\mu(t)\right]^2 dt}}, \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

gdje za svako ϑ uvijek jedan μ postoji, da su sve relacije zadovoljne. Imamo teorem:

Dade li se nesimetrička jezgra $G(s, t)$ prikazati u obliku

$$G(s, t) = \int F(s, t)\, j(t)\, dt,$$

gdje integral može biti neodređen ili određen granicama (c', t), gdje je c' neka konstanta, i ako su nam poznate sve karakterističke vrijednosti λ_μ i sve pridružene karakterističke funkcije $\varphi_\mu(s)$ i $\psi_\mu(s)$ nesimetričke jezgre

$$F(s, t) = \sum_{\mu} \frac{\varphi_\mu(s)\, \psi_\mu(t)}{\lambda_\mu},$$

tada možemo odrediti i sve karakterističke vrijednosti γ_ϑ i sve pridružene karakterističke funkcije $g_\vartheta(s)$ $\bar{g}_\vartheta(s)$ nesimetričke jezgre $G(s, t)$, čim „rješenje" $j(t)$ ispunjava uvjete:

$$\int_a^b m_\mu(t) \cdot m_{\mu'}(t)\, dt = 0, \qquad (\mu \neq \mu').$$

Jezgre $F(s, t)$ i $G(s, t)$ imadu ili jednak broj karakterističkih vrijednosti ili ih ima jezgra $G(s, t)$ dva puta toliko koliko jezgra $F(s, t)$; u toj su zgodi apsolutne vrijednosti od dva i dva korijena γ_ϑ i dviju i dviju karakterističkih funkcija druge vrste $\bar{g}_\vartheta(s)$ uvijek međusobno jednake, a razlikuju im se tek predznaci. Karakteristične funkcije prve vrste $g_\vartheta(s)$ i $\varphi_\mu(s)$ jesu međusobno jednake, a karakteristične funkcije druge vrste $\bar{g}_\vartheta(s)$ i karakteristične vrijednosti γ_ϑ ovise nesamo o karakterističkim funkcijama druge vrste $\psi_\mu(t)$ jezgre $F(s, t)$, već i o „rješenju" $j(t)$. Dobiveni rezultati bit će valjani onda i samo onda, ako niz

$$\sum_{\vartheta} \frac{g_\vartheta(s) \cdot \bar{g}_\vartheta(t)}{\gamma_\vartheta}$$

konvergira uniformno u promatranom intervalu, jer on tada i samo tada predstavlja vrijednost funkcije $G(s, t)$.

Opaska. Dade li se funkcija $F(s, t)$ prikazati oblikom (26), a njene pridružene karakteristične funkcije i karakteristične vrijednosti relacijama (40), (39) i (41), tada možemo (53) pisati u obliku:

$$\left.\begin{aligned} g_{\vartheta}(s) &= k_{\nu}(s), \\ \bar{g}_{\vartheta}(s) &= \frac{n_{\nu}(s)}{\sqrt{\int_a^b \left[n_{\nu}(t)\right]^2 dt}}, \\ \gamma_{\vartheta} &= \frac{\varkappa_{\nu}}{\sqrt{\int_a^b \left[n_{\nu}(t)\right]^2 dt}}, \end{aligned}\right\} \quad (53)'$$

gdje je:

$$n_{\nu}(t) = \iint k_{\nu}(t)\, h(t)\, dt \,.\, j(t)\, dt, \quad (54)$$

gdje su integrirali ili neodređeni ili određeni granicama (c, t), dotično $(c' t)$. Ovo izlazi neposredno, ako vrijednost (26) za $F(s, t)$ uvrstimo u jednadžbu (50). Lako se razbira, da će u ovoj zgodi biti ispunjeni uvjeti

$$\int_a^b n_{\nu}(t) \,.\, n_{\nu'}(t)\, dt = 0, \qquad (\nu \neq \nu') \quad (55)$$

5. Sve dosada posmatrane ishodne jednadžbe jesu oblika:

$$f(s, t = \int_d^t P(s, t) \,.\, \chi(t)\, dt; \quad (56)$$

gdje je u općenom slučaju $P(s, t)$ poznata nesimetrička funkcija, a d neka konstanta. Ova se integralna jednadžba bitno razlikuje od Volterrine integralne jednadžbe prve vrste, a ja sam u prije citiranoj svojoj radnji obećao, da ću se njome potanje zabaviti. Već na prvi pogled vidimo, da uza zadane funkcije $f(s, t)$ i $P(s, t)$ nije ona svagda moguća, jer karakter funkcije $f(s, t)$ bitno zavisi o karakteru $P(s, t)$, kako smo to dosada i imali prilike vidjeti.

Naša je zadaća, da pokažemo rješenje $\chi(t)$ ove integralne jednadžbe prve vrste. U tu svrhu integrirat ćemo parcijalno desnu stranu:

$$\left.\begin{aligned} \int_d^t P(s, t) \,.\, \chi(t)\, dt = P(s, t)\, \chi(t) - P(s, d)\, \chi(d) + \\ - \int_d^t P'_t(s, t) \left[\int \chi(t)\, dt\right] dt, \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

te uvrstimo li u (56), pošto smo uveli prikrate:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(s, t) + P(s, d) \,.\, \chi(d)}{P(s, t)} &= F(s, t), \\ \frac{P'_r(s, r)}{P(s, t)} &= K(s, t, r). \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

izlazi:

$$F(s, t) = \chi(t) - \int_d^t K(s, t, r) \left[\int \chi(r)\, dr\right] dr. \quad (56)'$$

Ovu integralnu jednadžbu možemo svesti i na drugi oblik, ako stavimo:

$$\left.\begin{aligned} \int \chi(r)\, dr &= \varphi(r), \\ \chi(r) &= \varphi'(r), \end{aligned}\right\} \quad (59)_1$$

tad imamo:

$$F(s, t) = \varphi'(t) - \int_d^t K(s, t, r) \,.\, \varphi(r)\, dr. \quad (56)''$$

Integrirajmo obje strane neodređeno po t i uvedimo prikrate:

$$\left.\begin{aligned} \int F(s,t)\,dt &= L(s,t), \\ \int \varphi'(t)\,dt &= \varphi(t), \\ \int K(s,t,r)\,dt &= M(s,t,r), \end{aligned}\right\} \qquad (59)_2$$

poprimit će (56)" konačno oblik:

$$L(s,t) = \varphi(t) - \int_a^t M(s,t,r)\,\varphi(r)\,dr. \qquad (60)$$

a ovo je Volterrina integralna jednadžba druge vrste, koju znademo riješiti. Ovako je naš problem potpuno riješen.

Dnevni tok relativne vlage za Bucheben (1899.-1910.), Tragöß (1899., 1901.-1908.) i Kremsmünster (1904.-1910.).

(S 8 tabla i 2 karte.)

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 26. marta 1919.

Napisao dr. Andre Gilić.

Uvod. Dnevni se tok relativne vlage do danas ne odveć često, ali dosta podrobno s više strana obradio i proučio. Spomenut ćemo opsežne radnje E. Mazella (za Pulj[1]) i Trst[2]), L. Satka (za Tarnopol[3]) i Julija von Hanna (Sonnblick[4]).

Ova radnja istražuje dnevni tok relativne vlage za 3 postaje, i to za Bucheben (u predijelu Visokih Tura), Tragöß (Štajerska) i Kremsmünster (Gornja Austrija). Od ovih su po svom položaju prve dvije postaje izrazite doline, a posljednja je na obronku nad dolinom. Pobudu za tu radnju dao je negdašnji ravnatelj središnjega zavoda za meteorologiju i geodinamiku u Beču, pokojni prof. W. Trabert, koji mi je dobrohotno stavio na raspolaganje potrebiti materijal, pa me je obvezao na duboku zahvalnost.

Podaci, koji su poslužili kao baza za istraživanje relativne vlage, protežu se kako za koju postaju, na vrijeme od sedam do dvanaest godina i prema tome podaju prilično dug niz opažanjâ.

---

[1]) E. M. „Die Feuchtigkeit in Pola". Sitzungsber. der Wien. Akademie, CVIII. Abt. IIa 1899. 281.

[2]) E. M. „Zur tägl. Periode u. Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit." Sitzungsberichte der Wien. Akad. CVIII. 1899. März.

[3]) L. S. „Die rel. Feuchtigkeit in Tarnopol". Sitzb. d. Wien. Akad. CXII. 1903. 210.

[4]) J. v. Hann „Die Verhältnisse der Luftfeuchtigkeit auf dem Sonnblickgipfel, 3106 m." Sitzb. d. Wien. Akad. 1895. 351.

Dnevni je tok relativne vlage određen poprijeko za pojedine mjesece, za pojedino godišnje doba i godinu, kod čega su uzeti u obzir prekidi u opažanjima, a godišnji tok izlučen. Uza to je određen dnevni tok tlaka pare (koji gotovo točno prikazuje i tok apsolutne vlage) i dnevna popriječna aperiodička promjena relativne vlage.

K rezultatima, što su sakupljeni na 1.—8. tabli i na dvjema kartama, valja pripomenuti još ovo:

Prekidi u opažanjima nijesu nigdje napose interpolirani, već gdjegod nije bilo kojega data tijekom dana, taj je dan posve izostavljen, jer bi inače tok izašao iznakažen. U slučaju, gdje su opažanja bila nepotpuna, u više od trećine svih dana u mjesecu, uzete su u račun dobivene satne vrijednosti za taj mjesec kod sastavljanja sveukupnoga poprječnog toka s manje težine, i to razmjerno prema broju danâ, koji su falili (vidi pobliže u dodatku tablu 8.).

Godišnje i aperiodičke promjene izlučene su iz dnevnoga toka po Lamontovoj metodi.[1]) Samo za postaju Kremsmünster nijesu te korekcije izračunate, jer u godišnjacima centralnoga zavoda u Beču kao i u godišnjim izvješćima zvjezdarnice u Kremsmünsteru (gdje bijahu motrenja objelodanjena) nema vrijednosti za 0^h_a. Uostalom bijahu te korekcije vrlo malene, te najveća (prosječna aperiodička promjena relativne vlage kroz dan) iznosi jedva 0,6%.

Dnevni je tok tlaka pare za pojedino godišnje doba i godinu određen prema dnevnom toku relativne vlage i njoj odgovarajuće temperature. Upotrebljeni tokovi jednoga i drugog meteorološkog elementa ne odnose se na isti vremenski razmak; tako je na pr. kod Tragößa tok temperature dobiven na temelju opažanja od 10 godina (1899.—1908.), a tok vlage na temelju opažanja od 9 godina (1899., 1901.—1908.). No uza sve to možemo rezultat držati ispravnim s obzirom na dugi niz opažanja, na kojima se temelje oba gore spomenuta toka, te koja podavaju rezultatima značenje gotovo normalnih vrijednosti.

Dnevni je tok relativne vlage i tlaka pare matematički prikazan dvočlanim sinusovim nizom, i to u obliku: $y = a_1 \sin (A_1 + x) + a_2 \sin (A_2 + 2x)$. y znači otklon relativne vlage od popriječne dnevne vrijednosti, x pripadajući satni kut srednjega sunca, a_1 a_2 konstantne vrijednosti za amplitudu, a A_1 A_2 konstante za faze.

[1]) Vidi H. Wilda „Temperaturverhältnisse des russischen Reiches." St. Petersburg 1881. Repertorium für Meteorologie. IV. 7. str. 9.

Konstante su izračunate po metodi najmanjih kvadrata[1]) na temelju 24-satnih poznatih vrijednosti, a osim toga su za kontrolu izvedene po približnim formulama, koje je Alt[2]) naveo.

Na kraju navedene popriječne dnevne aperiodičke amplitude relativne vlage (za Kremsmünster nema tih vrijednosti, jer nema opažanja za to) određene su na temelju dnevnih krajnjih vrijednosti (minimum i maksimum), uzetih iz satnih opažanja. Ove amplitude uzete kao brojnik i pripadajuće popriječne dnevne periodičke amplitude kao nazivnik daju kvocijent, kojega vrijednost daje mjeru za periodičnost dnevnih promjena relativne vlage.

Bilješke k pojedinim postajama.

Bucheben[3]) 47° 8′ sj. šir. 12° 58′ E Gr. 1230 m visine

Ova postaja leži u dolini na podnožju Visokih Tura i služi od god. 1898. kao podnožna postaja za Sonnblick mjesto nekadašnje u Kolm-Saigurnu, koja je 1890. ukinuta.

Ona leži neko 8 km sjeverno od Kolm-Saigurna u gornjem dijelu doline Raurisa, koja umjereno pada od sjevera prema jugu. Dolina je ovdje već dosta uska, ima veliku strminu, a s obje su joj strane manje strmi, visoki obronci.

Richard-higrograf, koji je namješten na ovoj postaji, bio je uvijek[4]) u potpunom redu.

Za određenje toka relativne vlage upotrebljena su opažanja od 12 godina (1899.—1910.), u kojima nema jedino $4^1/_2$ mjeseca.

S obzirom na te prekide proizlazi težina toka u pojedinim mjesecima ponešto različna, i to kako slijedi:

Jan.	Feb.	Mart	Apr.	Maj	Jun	Jul	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.
12	12	12	12	12	$11^1/_2$	12	11	12	10	11	12

[1]) Vidi H. Meyera, „Anleitung zur Bearbeitung meteorol. Beobachtungen". Berlin 1891. Str. 36.

[2]) Dr. E. Alt „Die Ableitung von Näherungswerten der harmonischen Konstituenten". Meteor. Zeitschrift. 1911. strana 369.

[3]) J. Valentin, „Der tägl. Gang der Lufttemperatur in Oesterreich". Denkschriften d. Wien. Akad. 73. Jubelband der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien.

[4]) Jahrbücher der k. k. Zentralanstalt für M. u. G. Wien. 1901. 05.

„Lamontova“ je pak „korekcija“ (prosječna aperiodička promjena relativne vlage u % kroz dan) u toku za pojedine mjesece pronađena ovako:

Jan.	Feb.	Mart	April	Maj	Jun	Jul	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.
—0,1	+0,2	+0,2	+0,2	—0,2	+0,2	0,0	—0,2	—0,3	0,0	—0,2	0,0 %

Za izračunavanje toka tlaka pare upotrebljen je dnevni tok temperature — u otklonu od srednje vrijednosti — po Valentinu.[1]) Apsolutne vrijednosti temperature, kojih u spomenutoj radnji nije bilo, izračunate su po opažanjima iz godišta 1899.—1901. i 1904.—1006.[2]), kako slijedi:

Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	Godina
—4,1	4,0	13,1	4,9	4,6 °C

Tragöß[3]) 47° 31′ sj. šir. 15° 5′ E Gr. 765 m visine

„Tragöß u Štajerskoj leži u kotlini, koja se proteže od sjevera prema jugu, na podnožju Hochschwab-plateaua. Postaja je u apsolutno velikoj visini, ali je s desna i s lijeva nadvisuju bregovi od 400—500 m. Meteorološka se postaja odlikuje jakim dnevnim i godišnjim promjenama temperature, kako je J. Valentin[1]) potanje istražio, a poznata je osim toga po svojem Föhnu u zimi, a mrzloj „buri“ ljeti[4]). Ti vjetrovi nastaju uslijed položaja postaje na južnom podnožju gore spomenutog plateaua.“

Za izračunavanje toka te postaje upotrebljena su 9-godišnja opažanja (1899., 1901.—1908.), među kojima nema samo $2^1/_2$ mjeseca. Kroz sve je ove godine i ovdje funkcionirao Richardov higrograf u potpunom redu.[5])

Težina toka poprječno za pojedine mjesece iznosi:

Jan.	Febr.	Mart	April	Maj	Jun	Jul	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dec.
9	9	9	8	9	9	9	9	9	$8^1/_2$	8	9

Lamontova je korektura:

0,0	-0,6	0,0	+0,6	+0,2	-0,6	0,0	+0,3	0,0	0,0	+0,2	-0,2 %

[1]) J. Valentin „Der tägliche Gang der Lufttemperatur etc . . .“ l. c.
[2]) Po podacima iz „Jahrbücher der k. u. k. Zentralanstalt etc . . .“ Wien.
[3]) Jahrbücher der k. k. Zentralanstalt f. Meteor. u. Geod. Wien, 1909. (Inspektionsreise).
[4]) J. Hann „Handbuch der Klimatologie“. 1908. I. str. 312.
[5]) Jahrbücher der k. k. Zentralanstalt etc. . . Jahrgang 1909.

Kako tok temperature na toj postaji nije poznat, morao se odrediti, da se uzmogne izračunati dnevni tok tlaka pare. To je učinjeno za mjesec srpanj (kao reprezentant ljetne dobe) i za godinu na temelju satnih vrijednosti od deset godina (1899.—1908.).

Kremsmünster[1]) 48° 4′ sj. šir. 14° 8′ E Gr. 384 m visine

„Postaja leži na obronku brda neko 80 m iznad doline, prema kojoj se tlo strmo ruši. Dalju joj okolicu tvori šumovito i brdovito tlo; u većoj se daljini prema jugu vide vršci austrijskih vapnenih Alpi. Zimi je radi svog položaja često iznad magle, što pokriva dolinu.“

Dnevni tok rel. vlage za tu postaju izračunat je po bilješkama Richard-higrografa[2]) iz god. 1904.—1910.[3])

Za određenje toka tlaka pare upotrebljen je tok temperature u otklonu od srednje vrijednosti po J. Valentinu.[1]) Apsolutne vrijednosti, koje su potrebne za izračunavanje tlaka pare, određene su po opažanju od 10 godišta (1892.—1901.), kako slijedi:

Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	Godina
—1,5	8,4	17,4	8,8	8,2 °C

Dnevni tok tlaka pare.

Rezultati. Popriječni se tok za pojedino godišnje doba i godinu — samo za Tragöß imamo tek srpanj i godinu — nalazi na 1. tabli, a grafički na I. karti.

Iz grafičkog prikaza slijedi:

	Zima	Prolj.	minimum Ljeto	Jesen	God.
Kremsmünster	8,0a	6,6a	6,8a	7,3a	6,6a
Bucheben[4])	7,5a	5,6a	4,5a	6,6a	5,2a
	—	(3,0p	11,1a)	—	—
Tragöß[4])	—	—	4,8a[5])	—	4,7a
	—	—	(pd)	—	(10,0a)

[1]) J. Valentin „Der tägliche Gang der Lufttemperatur etc . . .“ l. c.
[2]) Jahrbücher der k. k. Zentralanstalt etc. . . Jahrgang 1909.
[3]) Jahresberichte der Sternwarte Kremsmünster, 1904.—06. i Jahrbücher der k. k. Zentralanst. f. M. u. G. Wien, 1907.—10.
[4]) Brojevi u zagradama odnose se na sekundarne ekstreme.
[5]) Odnosi se na srpanj.

			maksimum		
Kremsmünster	3,1p	3,1p	3,2p	2,8p	3,0p
Bucheben	1,1p	6,9p	5,3p	4,1p	4,3p
	—	(10,0a	9,0a)	—	—
Tragöß	—	—	6,8p[1])	—	6,7p
	—	—	(8,5a)	—	(9,5a)

Kako vidimo, minimum pada gotovo u svim postajama najednako, t. j. jutrom između 4,5a—8,0a, već prema godišnjem doba i postaji, dok se maksimum nepravilnije pojavljuje, t. j. između 1,1p—6,9p.

Motrimo li tok na I. karti, vidimo, da je zimi svuda jednak: od jutarnjeg minima do popodnevnoga maksima (između 1,1p—3,1p) postojano raste, a tad opet pada cijelu noć. U drugo se godišnje doba za različne postaje manje slaže: Kremsmünster ima isti tok kao zimi, pa se po tom slaže s motrenjima na gorskim vršcima, samo mu je amplituda veća. Bucheben i Tragöß odlikuju se u proljeću i ljeti — osobito u srpnju — sekundarnim minimom sred dana (11a—pd) — a glavni maksimum pada tek kasno u večer. U jeseni i poprijeko za godinu nema izrazita sekundarnog minima, ali se opaža oko podneva kao neka sploštenost u razvoju toka.

Što se tiče amplitude dnevne periode, iz grafičkog se prikaza dade ovo ustanoviti:

Dnevna periodička amplituda u mm.

	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	Godina
Kremsmünster	0,66	1,50	2,64	1,65	1,48
Bucheben	0,43	0,38	1,31	0,63	0,54
Tragöß	—	—	1,44[1])	—	0,70

Najmanja je prosječna amplituda u godini u Buchebenu, a najveća na Kremsmünsteru. Kroz godinu pak raste od zime prema ljetu, gdje je najveća, samo je u Buchebenu (a valjda i u Tragößu) proljetna amplituda manja nego zimi.

Diskusija.

Bucheben (vidi 1. tablu u dodatku i I. kartu).

Dnevni tok tlaka pare pokazuje uglavnom osobine, koje se opažaju na postajama u nizini.

[1]) Odnosi se na srpanj (isp. str. 29.).

Prije podne raste tlak pare zbog toga, što se s temperaturom pospješuje i ishlapljivanje, pa se tako u zatvorenoj kotlini nakupi velika količina vodene pare. Popodne i noću pada tlak pare radi polaganijeg ishlapljivanja, koje se često prema jutru, kad temperatura padne do rosišta, zamjenjuje kondenzacijom (maglom). U glavnom stoji, da je tok tlaka pare gotovo paralelan s temperaturom.

Što se tiče niskoga tlaka pare oko podneva za toplijih godišnjih doba, to je posljedica uzdušne struje, koja se s ugrijanoga tla diže u vis, pa tako iz doline sobom odnosi vodenu paru. Međutim je utjecaj ove uzdušne struje na tlak pare relativno ograničen, jer se ona (struja) u dolini obrazuje u karakteristični „vjetar iz doline", koji puše horizontalnom komponentom t. j. u smjeru, uz koji je gotovo konstantna množina vodene pare tako, da nema osobita razloga, da zbog toga nastanu promjene u tlaku pare. U proljeću drži se tok tlaka pare od 9a—7p uvijek na istoj visini; pače i ljeti iznosi sekundarno padanje tlaka pare od 9a—11a jedva 0,1 mm, dok je dnevna periodička amplituda 1,3 mm. Za ljetnog popodneva, odmah kako počinje jenjavati vjetar iz doline, biva tlak pare opet jači; tomu je uzrokom opet ishlapljivanje, koje je u dolini još sveudilj jako. Radi zatvorenog položaja uzduha u dolini, koji prieči difuziju njegovu na sve strane, dovodi to u kasno popodne do značajno visokog maksima tlaka pare. Takav je ljetni tok tim vrlo sličan onome naših primorskih postaja,[1]) gdje se također, doduše s drugih razloga, opaža podvečer visok tlak pare.

Tragöß (vidi tablu 1. i kartu I. u dodatku).

Prilike su na toj postaji sasvim slične onima u Buchebenu — koliko to možemo zaključiti po toku, što ga imamo samo za srpanj i godinu, te s obzirom na sličan položaj obiju postaja u visokoj dolini.

Popriječni godišnji tok ide dosta jednostavno i pravilno (vidi I. kartu) s minimom u 4,7a, a maksimom u 6,7p.

No u srpnju i uopće u toplije godišnje doba odlikuje se tok izrazitim sekundarnim minimom u podne i jakim maksimom u

[1]) Vidi Wilhelm Kesslitza: „Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen in Pola von 1867—1897." Veröffentlichungen des hydrographischen Amtes der k. k. Kriegsmarine in Pola. Tafel V.

kasno popodne (6,8p), koji se ističe visoko nad tlakom pare u ostalo doba dana. Objema tim značajkama isti je uzrok kao i kod Buchebena: prvoj — svagdanja uzdušna struja („vjetar iz doline"); drugoj — jako ishlapljivanje vode u zatvorenoj dolini.

Kremsmünster (isp. tablu 1. i kartu I.).

Prema grafičkom prikazu dnevnoga toka tlaka pare i njemu odgovarajućega toka temperature[1]) slijedi:

	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	God.
			Minimum		
Tlak pare	8,0a	6,6a	6,8a	7,3a	6,6a
Temperatura	7,6a	5,7a	5,0a	6,6a	5,3a
			Maksimum		
Tlak pare	3,1p	3,1p	3,2p	2,8p	3,0p
Temperatura	2,9p	2,9p	3,0p	2,7p	2,8p
			Dn. per. amplituda		
Tlak pare	0,66	1,50	2,64	1,65	1,48 mm
Temperatura	3,4	7,8	8,8	5,8	6,4 °C

Tlak se pare i temperature dobro slažu, osobito u maksimu za toplije godišnje doba; samo minimum tlaka pare zakasni katkada. Sekundarnoga minima u podne nema ovdje, kako je to bilo kod prvih dviju postaja, već tlak pare neprestano raste do 3p, pa je stoga dnevna periodička amplituda neobično velika (vidi gore). Osim ishlapljivanja te periodičkih promjena njegovih kroz dan dolazi tu u obzir i periodičko strujanje uzduha: ujutru naime prima postaja uslijed svoga položaja na obronku nad dolinom onaj uzduh, koji se jedva uzdigao iz doline, pa je prema tome razmjerno bogat vodenom parom i uzrokuje jak prirast tlaka pare; popodne opet radi istoga položaja na obronku nema mogućnosti kao u dolinama, da se vodena para nakupi do uvečer, već odmah iza 3p, kad počinje da jenjava ishlapljivanje i uzdušna struja, pada i tlak pare. To vrijedi pogotovu noću, kad se ohladnjeli uzduh spušta s obronka u dolinu. Najbolje nam to dokazuje činjenica, da tlak pare u proljeću, ljeti i u jeseni pada sve do 7a, premda je ishlapljivanje u to doba već davno (bar ljeti) počelo rasti!

[1]) J. Valentin „Der tägl. Gang etc." . . . l. c.

Hoćemo li da dnevni tok tlaka pare prosudimo po sinusovim redovima, ogledajmo niže navedene jednadžbe za tlak pare i temperaturu u godini:

Bucheben	a_1 A_1	a_2 A_2
Tlak pare	0,25 . sin (218,7 + x)	+ 0,01 . sin (157,8 + 2x)
Temperatura[1])	2,95 . sin (228,8 + x)	+ 0,83 . sin (57,4 + 2x)
Tragöß		
Tlak pare	0,28 . sin (200,5 + x)	+ 0,05 . sin (171,8 + 2x)
Temperatura[1])	3,71 . sin (233,7 + x)	+ 0,90 . sin (57,1 + 2x)
Kremsmünster		
Tlak pare	0,64 . sin (208,9 + x)	+ 0,17 . sin (41,7 + 2x)
Temperatura[1])	2,93 . sin (220,0 + x)	+ 0,97 . sin (36,8 + 2x)

Ovdje vidimo, da se Bucheben i Tragöß lijepo slažu u svojim fazama tlaka pare i temperature u 1. članu, a Kremsmünster se dosta slaže i u 2. članu. Ekstremi tlaka pare prema ekstremima temperature zakašnjuju najviše kod Tragößa (oko 2^h). Inače teče tlak pare paralelno s temperaturom.

Dnevni tok relativne vlage.

Rezultati. Popriječni je tok za pojedine mjesece sakupljen na 2.—4. tabli. Na postajama Bucheben, Tragöß i Kremsmünster pada dosta nejednako maksimum u rano jutro, a minimum otprilike usred dana. Dnevne su periodičke amplitude velike: poprijeko u godini 23,4 dotično 28,6 i 17,2%.

Poprijeko za pojedino godišnje doba nalazimo tok na tabli 5. i 6. i na karti II., na kojoj se lijepo razbira, da je tok svagdje vrlo izrazit. Minimum pada između 1,1p—3,1p, a maksimum ujutro, i to najranije ljeti, a sve kasnije prema zimi. Amplituda je popriječno za godinu najveća u Tragößu (29%), a najmanja na Kremsmünsteru (17%); inače raste općeno od zime prema ljeti. Tok odgovara potpuno onomu, koji se inače opaža na ravnici i u dolini.

I popriječne su dnevne aperiodičke promjene za Bucheben i Tragöß (tabla 7.) velike, i to za godinu iznose 37% odnosno

[1]) Izračunato po poznatome toku (isp. str. 28. i 29.).

41%. Najmanje su vrijednosti za Bucheben u januaru, i to 25%, a za Tragöß u decembru 28%, a najveće u aprilu 42%, dotično u maju 49%. Omjer je aperiodičke aplitude prema periodičkoj malen: popriječno za godinu iznosi 1,60 odnosno 1,43. Najveću vrijednost nalazimo zimi, i to za Bucheben 2,1, a za Tragöß 1,7.

Diskusija.

Bucheben (vidi tablu 2., 5. i 7. i kartu II.).

Na dnevni tok relativne vlage kod te postaje imade ponajglavniji utjecaj jako ugrijanje doline prema podnevu i ohlađivanje njeno noću. Prvi faktor čini, da tim, što se uzduh kod porasta temperature sve više udaljuje od stanja zasićenosti vodenom parom, relativna vlaga pada, dok se kod padanja temperature noću zbiva protivno. Zbog toga u svako godišnje doba teče tok relativne vlage obratno od toka temperature, kako se to odavle jasno vidi:

	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	God.
Maks. rel. vlage	7,1a	5,4a	5,7a	6,1a	5,7a
Minim. temper.	7,3a	5,3a	5,1a	6,3a	5,5a
Minim. rel. vlage	1,6p	1,8p	1,7p	1,1p	1,6p
Maks. temper.	1,3p	1,7p	1,8p	0,9p	1,5p
Amplituda[1]) u % rel. vl.	13,5	28,0	31,2	22,4	23,7
„ u °C temp.	4,3	7,3	8,2	6,4	6,4

Maksimum relativne vlage pada u najhladnije doba, kad su stoga i magle u dolini najobičnije, a minimum pada u najtoplije doba. Prvi ekstrem kao i minimum temperature varira kroz godinu uporedo s izlazom sunca, naime ljeti dolazi već oko 5,7ha, a zimi tek iza 7a, dok je drugi ekstrem tijekom godine konstantniji, kaošto i maksimum temperature, pokazuje pak samo tu nepravilnost, što je malo preuranjen, t. j. pada prije 2 p. Tomu je uzrokom hladni vjetar, koji se u to doba pojavljuje s ledenjaka u dolini Rauris.[2])

Promjene pak ishlapljivanja u dolini, kao i uzdušne struje tijekom dana, koje danju povećavaju tlak pare, a noću ga smanjuju (vidi predašnji odsjek), ne utječu tim mnogo na dnevni tok relativne

[1]) Ove su vrijednosti uzete iz grafičkog prikaza toka te su stoga nešto veće od onih, koje proizlaze iz satnih vrijednosti (vidi tablu 7.).

[2]) Vidi J. Valentin „Tägl. Gang der Lufttemperatur etc." l. c. (str. 184.).

vlage. Utjecaj se opaža tek toliko, što amplituda ne izlazi točno proporcionalna odgovarajućoj amplitudi temperature prema različnom godišnjem doba. Inače ovisi relativna vlaga u dolini posve o temperaturi uzduha i pokazuje kao i ona jako izrazitu dnevnu periodičnost. Dokaz nam za tu periodičnost daje malena razlika između periodičke i popriječne aperiodičke dnevne promjene kod relativne vlage, kako je to po vrijednostima kvocijenta na tabli 7. bez daljeg komentara vidljivo.

Tragöß (vidi tablu 3., 5., 7. i kartu II.).

Ta je postaja po svom položaju visoka dolina, u kojoj su dnevne promjene temperature velike. Prema tome je i tok relativne vlage vrlo izrazit (slično kao i kod Buchebena). Minimum pada već prema godišnjem doba između 1p i 2p, a maksimum između 4 i 6a. Isporedimo li elemente dnevnoga toka relativne vlage i temperature, naći ćemo:

	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	God.
Maks. rel. vlage	3,1a (6,0a)[1])	5,2a	4,2a	5,7a	4,5a
Minim. temp.	—	—	4,7a[2])	—	5,2a
Min. rel. vlage	1,8p	2,0p	1,4p	1,8p	1,8p
Maks. temp.	—	—	1,2p[2])	—	1,7p
Amplituda u % rel. vl.	18,7	33,6	35,2	28,1	28,9
„ u °C temp.	—	—	10,5[2])		7,8

Temperatura i relativna vlaga teku protivno jedna drugoj, samo zimi pada glavni maksimum relativne vlage već u 3a, a u 6a, kad je najhladnije, samo je jedan sekundaran maksimum; inače se on kroz godinu mijenja paralelno s izlazom sunca.

Minimum je relativne vlage konstantan, ali je napadno uranjen, kao i kod Buchebena, u svako godišnje doba; i to je opet posljedica neobičnoga toka temperature, po kojemu se maksimum pojavljuje već prije 2p.

Što se tiče dnevne periodičke amplitude, veća je negoli u Buchebenu, odgovarajući većim dnevnim promjenama temperature u Tragößu. To isto vrijedi i za popriječnu dnevnu aperiodičku amplitudu, koja iznosi do 48,6%.

[1]) Ova brojka u zagradama naznačuje sekundarni maksimum.

[2]) Vrijedi za jul.

Kremsmünster (vidi tablu 4., 6. i kartu II.).

U toj se postaji, kako je Valentin pokazao, tijekom dana temperatura jako mijenja, osobito u toplije godišnje doba. Tome odgovara tok relativne vlage, koji opet teče protivno od toka temperature. O tom ćemo se uvjeriti isporedivši tok temperature i relativne vlage, gdje protivni ekstremi padaju u isto vrijeme:

	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	God.
Maks. rel. vlage	7,2a	5,2a	4,6a	6,1a	4,7a
Min. temper.	7,6a	5,7a	5,0a	6,6a	5,3a
Min. rel. vlage	1,9p	3,1p	3,0p	2,3p	2,4p
Maks. temper.	2,9p	2,9p	3,0p	2,7p	2,8p
Amplituda u % rel. vl.	9,1	23,3	24,3	13,9	17,3
„ u °C temp.	3,4	7,8	8,8	5,8	6,4

Napadna je ipak razmjerno umjerena amplituda relativne vlage. U Buchebenu su na pr. promjene relativne vlage veće unatoč manjim promjenama dnevne temperature (vidi str. 9.). No položaj Kremsmünstera čini, da je tlak pare visok oko podneva (vidi str. 7.), a to sprečuje dublje padanje relativne vlage.

Inače je karakter toka posve sličan onomu predašnjih postaja u dolini; osobito se lijepo opaža, kako maksimum prema zimi zakašnjuje s izlazom sunca.

Dnevni je tok relativne vlage po sinusovu nizu prikazan na tabli 5. i 6. U izvatku odatle slijede dolje jednadžbe relativne vlage i pripadajuće temperature poprječno za godinu:

Bucheben	a_1	A_1	a_2	A_2
Relativna vlaga	11,03 . sin	(52,2 + x)	+ 3,35 . sin	(232,7 + 2x)
Temperatura[1])	2,93 . sin	(228,8 + x)	+ 0,83 . sin	(57,4 + 2x)

[1]) Izračunato po poznatom toku (isp. str. 28. i 29.).

Tragöß	a_1	A_1	a_2	A_2
Relativna vlaga	14,16 . sin	(61,7 + x)	+ 3,83 . sin	(232,2 + 2x)
Temperatura[1])	3,71 . sin	(233,7 + x)	+ 0,90 . sin	(57,1 + 2x)
Kremsmünster				
Relativna vlaga	8,45 . sin	(50,5 + x)	+ 1,71 . sin	(208,7 + 2x)
Temperatura[1])	2,93 . sin	(220,0 + x)	+ 0,97 . sin	(36,8 + 2x)

Prema konstantama za faze u prvom i drugom članu jednadžbe (A_1 i A_2) dolazi relativna vlaga za 11—12 sati kasnije od temperature, t. j. relativna vlaga teče protivno od temperature.

U pojedinim se godišnjim dobama faze u dnevnom toku relativne vlage za Bucheben, Tragöß i Kremsmünster vrlo malo mijenjaju kao prema prvom tako i prema drugom članu. Godišnja varijacija dnevne periodičke amplitude — što raste od zime prema ljeti — lijepo je izražena odgovarajućom varijacijom konstante a_1.

Zaključak.

Rezultati ovoga istraživanja pokazuju, da postaje na obronku (Kremsmünster) i u dolini (Bucheben, Tragöß) imaju isti tok relativne vlage kao i one na ravnici. Uz jače ili slabije izraženu amplitudu teče on protivno od dnevnoga toka temperature na dotičnoj postaji.

Dnevni je tok tlaka pare mnogo značajniji za položaj postaje negoli gore spomenuti tok relativne vlage. Već mala uzvisina na obronku iznad doline (Kremsmünster) daje postaji sličan tok, kaošto ga imaju vrši. Tlak naime pare u svim godišnjim dobama raste s temperaturom, a tako isto s njom i pada.

Naprotiv tomu imaju doline kao i ravnice tok tlaka pare, koji se mijenja s godišnjim dobama. Kod jačeg ugrijanja tla uzrokuje dnevna okomita uzdušna struja sekundarni minimum u podne, i tako tok u toplijim mjesecima pokazuje dva maksima, jedan između 8—9a, a drugi između 5—7p. Tim, što je u takovim zgodama večernji maksimum mnogo izrazitiji od prijepodnevnoga, razlikuje se postaja u dolini od one na ravnici i pokazuje osobine naših

[1]) Izračunato po poznatom toku (isp. str. 28. i 29.).

primorskih postaja.[1]) To nam potvrđuju i druga opažanja. Hann spominje na pr. tok za Kurosavu[2]), dolinu u Japanu (35° 50' sj. šir., 834 m). Tu naraste u augustu tlak pare od glavnoga minima oko 5a do glavnoga maksima oko 6p za punih 2,54 mm, a sekundarni pad od podneva do 2p iznosi samo 0,02 mm! U Alagni[3]), u dolini Sesia, 1190 m, na podnožju Monte Rosa, naraste tlak pare (poprječno za jul – septembar 1907. – 08.) od 6a—6p za punih 2,39 mm, a o sekundarnom minimu o podne nema ni govora.

Tako se dakle čini da je visok maksimum tlaka pare u kasno ljetno popodne općena osobina dolinskih postaja.

[1]) Vidi bilješku 1. na str. 31.

[2]) Vidi Hann „Lehrbuch der Meteorologie" III. izdanje 1914. str. 239.

[3]) Vidi Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei. Vol. XVIII. 1909. (Referat o tome J. Hanna u Meteorol. Zeitschrift. 1910. str. 78.)

Tabla 1.

Dnevni tok tlaka pare u otklonu od srednje vrijednosti.

[mm]

	Bucheben					Tragöß		Kremsmünster				
	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	God.	Jul	God.	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	God.
1ha	—0,10	—0.11	—0.30	—0.13	—0.14	—0.23	—0,12	—0,11	—0.28	—0,65	—0,29	—0,32
2	—0.11	—0.14	—0,41	—0,19	—0,20	—0.49	—0.22	—0,16	—0,39	—0,85	—0.36	—0.37
3	—0.14	—0,18	—0,51	—0.26	—0,24	—0,58	—0.25	—0,19	—0,46	—1,05	—0,43	—0,47
4	—0.14	—0.20	*—0,62*	—0,28	—0,27	—0,67	—0.35	—0,22	—0,55	—1,16	—0,55	—0,57
5	—0.12	*—0,22*	—0,61	—9,32	*—0,31*	*—0,73*	*—0,38*	—0,24	—0,66	—1,24	—0,63	—0,61
6	—0.14	—0,21	—0,56	*—0,34*	—0,27	—0,36	—0,31	*—0,26*	—0,77	—1,33	—0,67	—0,66
7	*—0,16*	—0,11	—0,27	—0,33	—0,24	—0,02	—0,24	—0,25	*—0,78*	*—1,36*	*—0,70*	*—0,67*
8	—0.15	—0,03	—0.04	—0,13	—0,09	+0.10	—0.10	—0,26	—0,52	—0,83	—0,66	—0,51
9	—0.04	+0,12	+0.06	+0,04	+0,04	+0,08	+0,04	—0,22	—0,26	—0,40	—0.35	—0,30
10	+0.05	*+0,16*	0,00	+0,11	+0,10	—0,09	+0,04	—0,11	+0,01	+0,15	—0,11	—0,03
11	+0.18	+0,13	—0,03	+0,19	+0,14	—0,13	+0,07	—0,02	+0,29	+0,63	+0,23	+0,23
Pd	+0,23	+0,10	—0,02	+0,23	+0,18	—0,15	+0,09	+0,08	—0,49	+0,83	+0,49	+0,40
1p	*+0,26*	+0,12	+0,03	+0,26	+0,21	—0,14	+0,09	+0,24	—0,58	+0,97	+0,66	+0,55
2	+0.23	+0,09	+0,17	+0,26	+0,21	—0,06	+0,10	+0,30	+0,66	+1,13	+0,87	+0,70
3	+0.17	+0,08	+0,32	+0,28	+0,22	+0,31	+0,21	*+0,39*	*+0,70*	*+1,27*	*+0,94*	*+0,80*
4	+0,15	+0,12	+0,50	*+0,29*	*+0,23*	+0,33	+0,25	+0,36	+0,66	+1,22	+0,76	+0,72
5	+0.07	+0,10	*+0,67*	+0,27	+0,22	+0,51	+0,30	+0,27	+0,57	+1,10	+0,52	+0,57
6	+0.05	+0,10	+0,64	+0,17	+0,17	+0,63	*+0,37*	+0,18	+0,42	+0,85	+0,31	+0,43
7	0.00	*+0,16*	—0,49	+0,09	—0,11	*+0,70*	+0,29	+0,14	+0,25	+0,58	+0,23	+0,26
8	—0,02	—0,05	—0.35	+0,04	+0,06	+0,49	+0,18	+0,10	+0,14	+0,33	+0,15	+0,16
9	—0.04	+0,04	+0,32	+0,02	+0,02	+0,25	+0,10	+0,06	+0,09	+0,27	+0,05	+0,06
10	—0.06	+0,01	+0,10	—0,05	—0,02	+0,14	+0,06	+0,01	0,00	+0,07	—0,03	+0,01
11	—0.08	—0,01	—0,06	—0,08	—0,07	+0,13	0,00	0,00	—0,07	—0,14	—0,14	—0,10
Pn	—0,09	—0,07	—0,14	—0,10	—0,13	—0,04	—0,06	—0,06	—0,20	—0,36	—0,26	—0,22
Amplituda u mm	0.42	0.38	1.29	0.63	0.54	1.43	0.69	0.65	1.48	2.63	1.64	1.47

Dnevni tok poprijeko za godinu po sinusovu nizu:

$a_1 \sin (A_1 + x) + a_2 \sin (A_2 + 2x)$:

	A_1	A_2	a_1	a_2
Bucheben	218°.7	157°,8	0,25	0,01
Tragöß	200°.5	171°.8	0,28	0,05
Kremsmünster	208°.9	41°,7	0.64	0.17

Tabla 2.

Dnevni tok relativne vlage za Bucheben, 1230 m,

(1899.—1910.) u otklonu od poprječne vrijednosti

[s korekturom radi godišnje promjene].

	Januar	Februar	Mart	April	Maj	Jun	Jul	August	September	Oktobar	Novembar	Decembar
1ha	+2,8	+4,1	+7,1	+9,6	+10,6	+11,1	+11,2	+9,7	+8,5	+6,7	+3,4	+2,3
2	+3,0	+4,9	+7,8	+10,5	+11,4	+12,6	+12,1	+10,3	+9,3	+7,3	+3,9	+2,5
3	+3,6	+5,4	+8,4	+11,0	+12,7	+13,2	+12,8	+10,9	+10,0	+7,7	+4,0	+2,8
4	+3,8	+6,1	+8,5	+11,9	+13,3	+13,9	+13,3	+11,2	+10,1	+8,3	+4,7	+3,1
5	+4,1	+6,9	+9,0	*+12,5*	*+14,1*	*+14,4*	*+13,9*	+12,1	+10,6	+8,6	+4,9	+3,3
6	+4,1	*+7,0*	*+9,4*	+12,3	+13,3	+13,9	+13,8	*+12,8*	*+10,8*	*+8,8*	*+5,4*	+3,6
7	*+4,5*	+6,9	+8,9	+10,6	+9,2	+8,4	+8,5	+10,7	+10,7	+8,3	+5,0	+3,5
8	+4,2	+6,1	+7,0	+6,0	+4,2	+3,1	+3,8	+5,7	+7,7	+7,7	+5,0	*+3,9*
9	+3,3	+4,4	+2,2	+0,1	−1,8	−2,6	−1,8	−1,2	+1,3	+3,4	+3,6	+3,1
10	+0,7	0,0	−3,5	−6,0	−7,8	−7,5	−7,5	−7,0	−5,2	−2,9	−0,2	+0,5
11	−3,2	−4,7	−8,7	−11,4	−12,1	−12,1	−12,4	−11,8	−11,3	−8,9	−5,4	−3,2
Pd	−6,2	−8,9	−12,0	−14,7	−14,6	−14,8	−14,8	−15,8	−15,6	−13,1	−8,6	−5,6
1p	−7,3	−11,0	−13,9	−16,3	−15,8	−16,6	−17,0	−17,5	*−17,6*	*−14,9*	*−9,4*	*−6,6*
2	*−7,3*	*−11,5*	*−14,9*	*−16,5*	*−16,7*	*−17,1*	*−17,6*	*−17,6*	−17,3	−13,7	−8,6	−6,5
3	−6,6	−9,9	−12,8	−15,7	−15,8	−16,0	−16,1	−16,3	−15,3	−11,6	−7,1	−5,6
4	−4,8	−8,1	−10,4	−13,0	−14,0	−14,1	−14,5	−13,7	−11,7	−9,1	−5,1	−4,3
5	−3,0	−5,9	−7,8	−9,5	−11,0	−11,2	−11,5	−9,1	−7,3	−6,5	−3,1	−2,3
6	−1,2	−2,9	−4,1	−5,9	−7,1	−7,5	−7,0	−4,2	−3,5	−3,7	−1,9	−1,0
7	−0,4	−1,0	−0,6	−1,9	−2,6	−3,1	−2,3	−0,7	−0,2	−1,3	−0,4	0,0
8	+0,4	+0,3	+1,3	+1,4	+1,2	+0,9	+1,7	+2,2	+2,4	+0,7	+0,4	+0,5
9	+1,1	+1,5	+3,3	+3,9	+4,2	+4,4	+4,9	+5,1	+3,9	+2,3	+1,2	+1,2
10	+1,5	+2,4	+4,6	+5,9	+6,5	+7,0	+7,4	+6,6	+5,2	+4,0	+2,1	+1,6
11	+1,6	+3,2	+5,7	+7,6	+8,3	+8,5	+9,1	+8,0	+6,5	+5,3	+2,5	+2,1
Pn	+2,4	+3,9	+6,2	+8,8	+9,6	+10,1	+10,5	+9,0	+7,6	+6,1	+2,9	+2,2
Amplituda (%)	11,8	18,5	24,3	29,0	30,8	31,5	31,5	30,4	28,4	23,7	14,8	10,5

Tabla 3.

Dnevni tok relativne vlage za Tragöß-Oberort, 765 m

(1899., 1901.—1908.) u otklonu od poprječne vrijednosti

[s korekturom radi godišnje promjene].

	Januar	Februar	Mart	April	Maj	Jun	Jul	August	September	Oktobar	Novembar	Decembar
1ha	+5,3	+6,1	+10,1	+12,7	+16,0	+14,9	+14,8	*+13,7*	+10,5	+8,7	+6,2	+4,3
2	+6,0	+6,1	+10,3	+12,8	+16,7	+15,4	+15,3	+13,2	+10,9	+8,6	*+6,2*	*+4,4*
3	+6,1	+6,8	+10,6	+13,3	+17,2	+16,0	+16,1	+13,6	+10,9	+9,0	+6,2	+4,2
4	*+6,2*	+6,6	*+11,3*	+13,3	*+17,5*	*+16,5*	*+16,9*	+13,4	+11,2	+9,2	+5,9	+4,1
5	+6,1	+6,7	+11,2	*+14,2*	+17,3	+16,1	+16,3	+13,5	+11,2	*+9,7*	+6,1	+3,6
6	+5,8	*+7,0*	+11,2	+13,7	+15,0	+13,0	+14,1	+12,9	*+11,3*	+9,6	+6,2	+3,8
7	+4,6	+6,7	+9,8	+9,8	+8,8	+5,2	+7,3	+8,8	+10,0	+9,0	*+6,2*	+3,3
8	+4,2	+5,6	+7,8	+3,5	−0,6	−2,9	−0,1	+1,8	+6,3	+7,0	+6,2	+3,5
9	+3,3	+2,8	+1,3	−4,9	−9,5	−10,3	−7,7	−6,5	−1,6	+2,0	+4,1	+1,7
10	+0,7	−2,2	−5,2	−11,1	−15,1	−15,3	−13,9	−12,4	−9,0	−4,8	−0,9	−0,4
11	−4,3	−7,8	−11,9	−15,6	−18,3	−17,8	−17,2	−17,0	−15,5	−12,7	−6,4	−4,5
Pd	−8,2	−11,0	−14,4	−17,5	−19,6	−18,4	−19,0	−19,1	−18,7	−16,9	−11,4	−7,8
1p	−11,7	−13,0	−16,9	−18,8	−20,1	*−18,7*	*−19,8*	−19,9	−19,6	−20,0	−14,7	−10,4
2	*−13,8*	*−14,1*	*−18,5*	*−19,1*	*−20,4*	−18,1	−19,4	*−20,0*	*−20,5*	*−20,7*	*−15,7*	*−11,1*
3	−11,5	−12,6	−17,9	−18,1	−19,2	−17,1	−17,1	−18,1	−17,7	−18,6	−12,9	−8,3
4	−8,5	−9,8	−15,2	−16,1	−17,1	−14,7	−15,8	−15,5	−15,0	−13,7	−8,9	−5,3
5	−4,3	−5,6	−10,7	−11,7	−13,1	−11,3	−12,6	−11,0	−9,3	−5,7	−4,3	−2,3
6	−2,1	−1,9	−5,2	−5,8	−7,9	−6,6	−7,7	−4,8	−2,5	−0,5	−1,3	−0,4
7	0,0	+1,2	−0,4	+0,4	−0,2	0,0	−0,8	+2,0	+3,3	+3,5	+0,7	+1,3
8	+1,5	+2,9	+2,8	+4,3	+4,8	+5,2	+4,1	+6,0	+6,2	+5,6	+2,3	+2,4
9	+2,5	+3,2	+5,3	+7,3	+8,4	+8,9	+7,7	+9,3	+7,8	+7,0	+3,7	+2,7
10	+3,8	+4,6	+6,8	+9,4	+11,1	+11,5	+10,6	+11,2	+8,9	+7,9	+4,6	+3,6
11	+4,5	+5,7	+7,9	+11,2	+13,8	+13,2	+13,0	+12,2	+9,5	+7,8	+5,1	+4,0
Pn	+4,6	+5,8	+9,4	+11,8	+14,8	+14,4	+14,1	+13,1	+10,2	+8,0	+5,7	+3,9
Amplituda (%)	20,0	21,1	29,8	33,3	37,9	35,2	36,7	33,7	31,8	30,4	21,9	15,5

Tabla 4.

Dnevni tok relativne vlage za Kremsmünster, 384 m,

(1904.—1910.) u otklonu od poprječne vrijednosti.

	Januar	Februar	Mart	April	Maj	Jun	Jul	August	Septembar	Oktobar	Novembar	Decembar
1ba	+1,6	+3,6	+6,5	+7,8	+10,0	+10,8	+9,4	+8,5	+6,3	+3,5	+2,3	+1.7
2	+1,8	+3,7	+7,2	+8,7	+11,0	+11,2	+9,7	+9,5	+6,9	+4,0	+2,3	+1,5
3	+1,9	+3,9	+7,7	+10,0	+11,6	+11,8	+10,6	+9,8	+7,0	+4,5	+2,5	+1,4
4	+2,1	+4,0	+8,2	+10,3	+12,2	*+12,4*	+11,4	+10,4	+7,5	+4,6	+2,6	+1,5
5	+1,9	+4,1	+8,5	*+10,8*	*+12,3*	+11,7	*+11,6*	*+10,8*	*+7,5*	+4,8	+2,6	+1,5
6	+2,1	+4,4	*+8,8*	+10,3	+8,5	+7,7	+9,1	+9,7	+7,5	*+5,2*	+2,9	+1,6
7	*+2,6*	*+4,7*	+8,0	+6,7	+4,2	+3,8	+4,1	+5,5	+6,0	+5,0	*+3,0*	*+2,1*
8	+2,5	+4,3	+5,4	+4,4	+1,3	+0,5	+0,9	+2,7	+4,0	+4,0	+2,7	+1,7
9	+1,5	+2,0	+2,2	+1,1	+1,5	−2,3	−2,0	−0,9	+0,9	+1,9	+1,6	+1.3
10	+0,1	−0,6	−1,3	−2,5	−4,4	−5,8	−4,4	−3,6	−2,7	−0,7	−0,4	+0.1
11	−2,5	−3,9	−5,2	−5,6	−7,5	−8,1	−7,0	−6,6	−5,2	−3,1	−2,4	−1.6
Pd	−4,1	−5,9	−8,0	−8,5	−9,3	−10,5	−9,1	−8,8	−7,4	−5,4	−4,4	−3.1
1p	−5,2	−7,6	−10,2	−10,9	−11,4	−12,6	−11,0	−10,9	−10,0	−7,2	−5,5	*−4,0*
2	*−5,4*	*−8,6*	−11,5	−12,5	−12,5	*−13,2*	−12,3	−12,1	−10,8	−8,7	*−6,4*	−3.9
3	−4,8	−7,9	*−11,8*	*−13,2*	*−13,1*	−12,5	*−12,4*	−13,1	*−11,0*	*−8,7*	−5.8	−3.4
4	−3,7	−6,9	−11,6	−12,3	−12,5	−11,8	−12,3	*−13,3*	−10,5	−8,0	−4.5	−2.0
5	−1,9	−4,1	−9,9	−10,7	−10,8	−10,9	−11,0	−11,6	−8,4	−5,7	−2.1	−0.8
6	−0,4	−1,7	−5,9	−8,3	−8,1	−7,9	−8,4	−8,1	−5,1	−2,4	−0,7	+0.3
7	+0,5	0,0	−2,6	−4,2	−5,1	−3,9	−4,4	−3,8	−1,0	−0,5	+0.5	+0.4
8	+1,2	+1,0	0,0	−0,3	−0,1	+1,4	0,0	+1,1	+1,2	+1,0	+1.0	+0.5
9	+1,6	+2,3	+2,1	+2,8	+3,9	+4,9	+5,0	+4,5	+2,9	+2,2	+1,5	+0.6
10	+1,8	+2,4	+3,1	+4,5	+5,9	+6,9	+6,7	+6,1	+4,5	+2,6	+1.9	+1.0
11	+2,1	+3,0	+4,5	+5,5	+7,5	+7,8	+7,6	+7,4	+5,2	+3,2	+2.2	+1.2
Pn	+2.0	+3,7	+5.5	+7,1	+8,5	+9,2	+8,9	+7,8	+5,8	+3,7	+2,2	+1,4
Amplituda (°/o)	8,0	13,3	20.6	24.0	25.4	25.6	24.0	24,1	18.5	13.9	9.4	6.1

Tabla 5.

Dnevni tok relativne vlage (s korekcijom radi godišnje promjene)

u otklonu od poprječne vrijednosti.

	Bucheben, 1230 m (1899.—1910.)					Tragöß-Oberort, 765 m (1899., 1901.—1908.)				
	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	God.	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	God.
	°/o	°/o	°/o	°/o	°/o	°/o	°/o	°/o	°/o	°/o
1ha	+3,05	+9,08	+10.68	+6,22	+7,26	+5,22	+12,95	+14,48	+8,51	+10,29
2	+3,45	+9,88	+11,68	+6,85	+7,97	+5,49	+13,28	+14,65	+8,61	+10,51
3	+3,91	+10,68	+12.32	+7.25	+8,54	*+5,69*	+13,71	+15,25	+8,75	+10,85
4	+4,31	+11,22	+12.82	+7,72	+9,02	+5,62	+14,05	*+15,61*	+8,81	*+11,03*
5	+4.75	*+11,85*	+13.48	+8,05	+9,54	+5,45	*+14,25*	+15,31	+9,05	+11.02
6	+4,88	+11,65	*+13,52*	*+8,35*	*+9,60*	+5,52	+13.31	+13,35	*+9,08*	+10,32
7	*+4,95*	+9,55	+9,22	+8,02	+7,94	+4,85	+9,48	+7,11	+8,45	+7,48
8	+4.71	+5,72	+4,22	+6,82	+5,37	+4,42	+3,58	−0,39	+6,55	+3.55
9	+3,58	+0,15	−1,85	+2,79	+1,17	+2,59	−4,35	−8,15	+1,55	−2,09
10	+0,38	−5,78	−7.32	−2,75	−3,86	−0,65	−10,45	−13,85	−4,85	−7,45
11	−3,72	−10,75	−12,08	−8,51	−8,76	−5,55	−15,25	−17,32	−11,49	−12,40
Pd	−6.92	−13,78	−15,12	−12,41	−12,05	−9,01	−17,15	−18,82	−15,62	−15,15
1p	−8,32	−15,35	−17,02	*−13,95*	−13,66	−11,71	−18,59	*−19,45*	−18,05	−16.95
2	*−8,45*	*−16,05*	*−17,42*	−13,18	*−13,77*	*−13,01*	*−19,32*	−19.15	*−18,92*	*−17,59*
3	−7,39	−14,78	−16,12	−11,31	−12,40	−10,81	−18,39	−17,42	−16,35	−15,74
4	−5,75	−12,48	−14,08	−8,61	−10,23	−7,88	−16,12	−15,32	−12.49	−12.95
5	−3,75	−9,45	−10,58	−5,61	−7,34	−4,08	−11,82	−11,62	−6,39	−8,47
6	−1,72	−5,72	−6,22	−3,01	−4,16	−1,48	−6,29	−6,35	−1,39	−3,87
7	−0,49	−1,72	−2,02	−0,61	−1,21	+0,82	−0,05	+0,41	+2,55	+0,94
8	+0,38	+1,28	+1,62	+1,19	+1,12	+2,25	+3,98	+5,11	+4,75	+4,03
9	+1,25	+3,78	+4,82	+2,49	+3,00	+2,79	+7,01	+8.65	+6,21	+6,17
10	+1,81	+5,65	+7,02	+3,79	+4,57	+3,99	+9,11	+11,11	+7,18	+7,85
11	+2.28	+7,18	+8.55	+4,79	+5,70	+4,72	+10,98	+12.81	+7,51	+9,01
Pn	+2,81	+8,18	+9,88	+5,55	+6,61	+4,75	+12,01	+13,88	+8,01	+9,67
Amplituda u °/o	13,40	27,90	30,94	22,30	23,37	18,70	13,57	35,06	28,00	28,62

Po sinusovu nizu:

$$a_1 \sin (A_1 + x) + a_2 \sin (A_2 + 2x).$$

A_1	44°,6	52°,7	55°,2	51°,5	52°,2	55°,7	60°,4	66°,0	60°,9	61°.7
A_2	221°,4	235°.0	238°,9	232°,8	232°,7	217°,5	237°,4	254°,2	225°,3	232°.2
a_1	5.71	13.41	15.18	9.88	11.03	7,97	17.29	18,60	12.89	14.16
a_2	2,65	3,55	3.42	3.85	3.35	3,43	3,70	3,12	5.47	3.83

Tabla 6.

Dnevni tok relativne vlage

u otklonu od srednje vrijednosti.

Kremsmünster, 384 m

(1904.—1910.)

	Zima	Prolj.	Ljeto	Jesen	God.
	%	%	%	%	%
1ha	+2,30	+8,08	+9,53	+4,02	+5,98
2	+2,33	+8,95	+10,10	+4,39	+6,44
3	+2,40	+9,75	+10,70	+4,66	+6,88
4	+2,53	+10,21	*+11,37*	+4,89	+7,25
5	+2,50	*+10,51*	+11,33	+4,96	*+7,32*
6	+2,70	+9,18	+8,80	*+5,19*	+6,47
7	*+3,13*	+6,28	+4,43	+4,66	+4,63
8	+2,83	+3,68	+1,33	+3,56	+2,85
9	+1,60	+0,58	−1,77	+1,46	+0,47
10	−0,14	−2,75	−4,63	−1,28	−2,20
11	−2,67	−6,12	−7,27	−3,58	−4,91
Pd	−4,37	−8,62	−9,50	−5,74	−7,06
1hp	−5,60	−10,85	−11,53	−7,58	−8,89
2	*−5,97*	−12,19	−12,57	*−8,64*	*−9,84*
3	−5,37	*−12,72*	*−12,70*	−8,51	−9,82
4	−4,20	−12,15	−12,50	−7,68	−9,13
5	−2,27	−10,49	−11,20	−5,41	−7,34
6	−0,60	−7,45	−8,17	−2,74	−4,74
7	+0,30	−3,99	−4,07	−0,34	−2,03
8	+0,90	−0,15	+0,80	+1,06	+0,65
9	+1,50	+2,91	+4,77	+2,19	+2,84
10	+1,73	+4,48	+6,53	+2,99	+3,93
11	+2,10	+5,81	+7,57	+3,52	+4,75
Pn	+2,30	+7,01	+8,60	+3,89	+5,45
Amplituda u %	9,10	23,23	24,07	13,83	17,16

Po sinusovu nizu:

$a_1 \sin (A_1 + x) + a_2 \sin (A_2 + 2x)$

A_1	52°,4	47°,1	53°,6	49°,6	50°,5
A_2	214°,9	208°,2	198°,1	209°,2	208°,7
a_1	3,79	11,33	12,27	6,45	8,45
a_2	1,85	1,69	1,13	2,22	1,71

Tabla 7.

Poprječna dnevna periodička i aperiodička promjena relativne vlage

(po satnim vrijednostima).

	Bucheben			Tragöß		
	Dnevna periodička amplituda u %	Poprječna dnevna aperiod. amplituda u %	Kvocijent	Dnevna periodička amplituda u %	Poprječna dnevna aperiod. amplituda u %	Kvocijent
Januar	11,8	25,0	2,12	20,0	33,3	1,67
Februar	18,5	32,1	1,74	21,1	34,6	1,64
Mart	24,3	38,2	1,57	29,8	44,4	1,49
April	29,0	41,9	1,44	33,3	45,3	1,36
Maj	30,8	41,3	1,34	37,9	48,6	1,38
Jun	31,5	41,5	1,32	35,2	46,8	1,33
Jul	31,5	41,4	1,31	36,7	48,2	1,31
August	30,4	39,4	1,30	33,7	46,1	1,37
Septembar	28,4	37,7	1,33	31,8	39,7	1,25
Oktobar	23,7	35,3	1,49	30,4	39,8	1,31
Novembar	14,8	27,8	1,86	21,9	35,8	1,63
Decembar	10,5	25,6	2,44	15,5	28,0	1,81
Godina	23,4	37,4	1,60	28,6	40,8	1,43
Zima	13,4	27,6	2,06	18,7	32,0	1,71
Proljeće	27,9	40,5	1,45	33,6	46,1	1,37
Ljeto	30,9	40,8	1,31	35,1	47,0	1,34
Jesen	22,3	33,6	1,51	28,0	38,4	1,37

Tabla 8.

Popis znatnijih prekida u bilježenju relativne vlage

za Bucheben (1899.—1910.) i Tragöß (1899., 1901.—1908.).

Mjeseci, kojih nema:

Bucheben: August 1907., Oktobar 1900. i 1903., Novembar 1903.
Tragöß: April 1901., Novembar 1903.

Ini prekidi, što su još osobito bili uzeti u obzir kod izračunavanja popriječne vrijednosti:

Postaja	Mjesec, god.	Broj dana koji fale	Težina[1])
Bucheben	Jun 1908.	15	1/2
Tragöß	Oktobar 1903.	14	1/2

[1]) Tu smo dali toku dotičnoga mjeseca kod izračunavanja poprječne vrijednosti od svih godišta (težina toka jednoga čitavog mjeseca uzeta je kao 1).

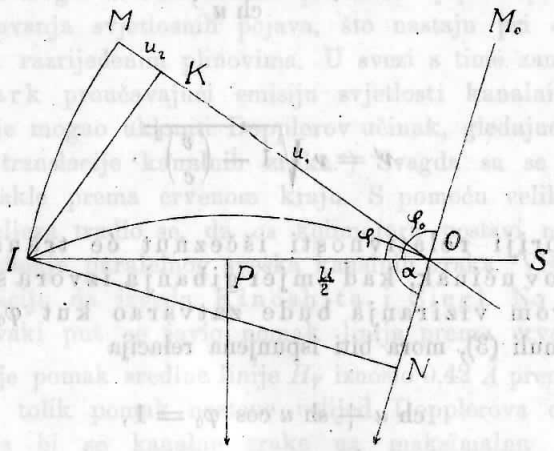
O transversalnom Dopplerovu učinku.

(S 1 slikom.)

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 3. juna 1919.

Napisao pravi član dr. V. Varićak.

Neka je IS smjer gibanja izvora svjetlosti, a MO smjer viziranja. Ta dva smjera zatvaraju kut φ. Brzina izvora svjetlosti neka je $IO = u$. Put, što ga izvor prevali u jedinici vremena, predočen je lukom graničnoga kruga nad tetivom IO. Taj ćemo



put rastaviti u dvije komponente. Jedna je granični luk nad KO, a druga je luk nad IK. Projekcije tih komponenata u smjer viziranja određene su dužinama u_1 i u_2. Kako je $u_1 + u_2$ brzina, kojom se izvor svjetlosti udaljuje od motrioca, bit će

$$\nu' = \nu\, e^{-(u_1+u_2)}. \qquad (1)$$

Dopplerov pojav zavisi o relativnoj brzini, pa stoga možemo i ovdje primijeniti formulu, koju smo našli, kad je izvor mirovao, a motrilac se gibao.[1]) Kako je pak[2])

$$e^{u_1} = \frac{\sqrt{1 + \text{th}\, u \cos\varphi}}{\sqrt{1 - \text{th}\, u \cos\varphi}},\quad e^{u_2} = \frac{\sqrt{1 - \text{th}^2 u \cos^2\varphi}}{\sqrt{1 - \text{th}^2 u}}, \tag{2}$$

izlazi

$$\nu' = \frac{\nu\sqrt{1 - \text{th}^2 u}}{1 + \text{th}\, u \cos\varphi} = \frac{\nu}{\text{ch}\, u + \text{sh}\, u \cos\varphi}. \tag{3}$$

Frekvencija zavisi o brzini i smjeru gibanja izvora svjetlosti. Za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ iščezava u klasičkoj teoriji Dopplerov učinak, pa je $\nu' = \nu$, dok je po teoriji relativnosti transversalni učinak tad određen formulom

$$\nu' = \frac{\nu}{\text{ch}\, u}, \tag{4}$$

ili

$$\nu' = \nu\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \tag{5}$$

Po teoriji relativnosti iščeznut će transversalni Dopplerov učinak, kad smjer gibanja izvora svjetlosti sa smjerom viziranja bude zatvarao kut φ_0, za koji, prema formuli (3), mora biti ispunjena relacija

$$\text{ch}\, u + \text{sh}\, u \cos\varphi_0 = 1,$$

t. j. kad bude

$$\cos\varphi_0 = -\,\text{th}\,\frac{u}{2}. \tag{6}$$

[1]) „Rad", knj. 202., str. 182.

[2]) „Rad", knj. 210., str. 159. Samo je ovdje kut φ šiljat.

Razabiramo da je $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$. Uzmemo li mjesto brzine u reduciranu brzinu v, tad izraz (3) prijeđe u

$$\nu' = \frac{\nu\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi}, \tag{7}$$

a kut $\varphi_0 = I\,O\,M_0$ dan je izrazom

$$\cos\varphi_0 = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - 1}{\frac{v}{c}}. \tag{8}$$

U formulu (5), koja određuje Dopplerov učinak, kad se gleda normalno na smjer gibanja izvora svjetlosti, polagala se nada, da bi se njom mogla utvrditi razlika prema starijoj teoriji, i to možda kod proučavanja svjetlosnih pojava, što nastaju pri električnom izbijanju u razrijeđenim plinovima. U svezi s time zanimljivo je, da J. Stark proučavajući emisiju svjetlosti kanalnih zraka u vodiku, nije mogao ukloniti Dopplerov učinak, gledajući normalno na smjer translacije kanalnih zraka.[1]) Svagda su se spektralne linije pomakle prema crvenom kraju. S pomoću velikog pravog kuta od željeza trudio se, da os kolimatora postavi normalno na smjer translacije paralelnog sveska kanalnih zraka. Više puta dao je tu operaciju da izvedu Kinoshita i Siegl. No uza svu tu pomnju, svaki put se javio pomak linija prema crvenoj strani. Jedamput je pomak sredine linije $H\gamma$ iznosio 0,42 Å prema crvenom kraju. Da tolik pomak nastane uslijed Dopplerova efekta, veli Stark, da bi se kanalne zrake uz maksimalnu brzinu od $8{,}38 \cdot 10^7$ cm. sec^{-1} morale udaljivati od pukotine spektroskopa pod kutom od 91° 59'. Pogrješka kod namještanja aparata iznosila bi 1° 59'.

[1]) J. Stark, Über die Lichtemission der Kanalstrahlen in Wasserstoff. Ann. d. Phys., 4. Folge, Bd. 21., 1806., str. 450.

Stark radi s običnom teorijom Dopplerova učinka te pomak računa po formuli

$$\Delta\lambda = \frac{v}{c} \cdot \lambda \cos\varphi . \qquad (9)$$

Po teoriji relativnosti moramo uz $\varphi = \frac{\pi}{2}$ očekivati pomak linija prema crvenom kraju. Formula (4), kad u nju unesemo dužine valova, daje nam

$$\lambda' = \lambda \operatorname{ch} u = \frac{\lambda}{\sqrt{(1-\operatorname{th} u)(1+\operatorname{th} u)}} . \qquad (10)$$

U onom slučaju, što ga Stark naročito ističe, bilo je $\lambda = 4340{,}7$, $v = 8{,}38 \cdot 10^7$ cm. sec^{-1}, stoga je $\operatorname{th} u = 0{\cdot}00279$, pa nam tako izađe $\lambda' = 4340{,}72$, dakle je $\Delta\lambda = 0{,}02$. Istu bismo vrijednost za $\Delta\lambda$ dobili, kad bismo pošli od izraza

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

pa bismo kao prvu aproksimaciju uzeli

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \cdot \lambda .$$

Opažani uklon iznosio je 0,42; bio je dakle mnogo veći, nego li bi smio biti po teoriji relativnosti.[1])

Po formuli (10) možemo odrediti brzinu v, koja bi uz $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dala uklon $\Delta\lambda = 0{,}42\ \mathring{A}$ vodikove linije $H\gamma$. Iz (10) izlazi naime

$$\operatorname{th}^2 u = \frac{(\lambda'+\lambda)(\lambda'-\lambda)}{\lambda'^2},$$

[1]) Isporedi i A. Einsteina, Über die Möglichkeit einer neuen Prüfung des Relativitätsprinzips. Ann. d. Phys., 23. str. 127., 1907.

pa je stoga

$$v = c \cdot \frac{\sqrt{(2\lambda+\Delta\lambda)\Delta\lambda}}{\lambda+\Delta\lambda} . \qquad (11)$$

Uz $\lambda = 4340{,}7$ izađe $v = 41{,}7.10^7$ cm. sec^{-1}. Iza katode ima doduše u isti čas različitih brzina kanalnih zraka, no to je ipak odveć velika razlika prema Starkovu određivanju. Zato mora biti i drugih faktora, koji su Dopplerov učinak onako pojačali. Najvjerovatnije će biti ono, što Stark spominje na str. 424. Kanalne se zrake reflektiraju na molekilima vodika, pa onda lete koso prema smjeru viziranja.

Na str. 414. spomenute svoje radnje naveo je Stark maksimalne brzine nosilaca od četiri linije vodikove. Brzine on računa po formuli

$$v = c \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} , \qquad (12)$$

jer se smjer viziranja podudara sa smjerom gibanja zraka.

Relativistička formula

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = e^u$$

dade

$$u = l\lambda - l(\lambda - \Delta\lambda) . \qquad (13)$$

Kako je u malena veličina, t. j. kako u leži u granicama, gdje se u i $\operatorname{th} u$ podudaraju u prvim decimalama, može se u zamijeniti s $\frac{v}{c}$, pa se uz primjenu dekadskih logaritama dobije

$$v = c \cdot \frac{\log\lambda - \log(\lambda - \Delta\lambda)}{M} . \qquad (14)$$

Računaju li se brzine s pomoću te formule, dobit će se isti brojevi, što ih je naveo Stark. Brzine su kanalnih zraka još premalene, a da bi se pokazala kakva znatnija razlika prema

starijoj teoriji. To se razabira već i po tome, što se kut φ_0, uz koji iščezava transversalni Dopplerov učinak, kod kanalnih zraka samo neznatno razlikuje od pravoga kuta.[1]) Uzmemo li kao srednju brzinu tih zraka $v = 2.10^8$ cm. sec^{-1}, onda bi φ_0 iznosio $90^0\,11'\,27''$.

Kad bi se izvor svjetlosti gibao trećinom brzine svjetlosti, bio bi

$$\cos \varphi_0 = 2\sqrt{2} - 3, \qquad \varphi_0 = 99^0\,52'\,35''.$$

Da bude $\varphi_0 = 135^0$, trebalo bi prema formuli (8), da je

$$v = 2\sqrt{2}.10^{10} \text{ cm. sec}^{-1} = 282843 \text{ km. sec}^{-1}.$$

Ovo je dašto samo od teoretičkoga interesa, jer ne poznajemo izvora svjetlosti, koji bi se tako brzo gibali. No ti nam brojevi objašnjuju neke relacije u prostoru hiperbolnom, koji je uzet za osnovu neeuklidskoj interpretaciji teorije relativnosti.

Formulama (6) i (8) određen je kut φ_0 kao funkcija brzine u i brzine v. Prema formuli (4) možemo reći, da je suplement kuta φ_0, uz koji iščezava transversalni Dopplerov učinak, jednak kutu paralelnosti, što pripada polovini brzine u.

Da to razaberemo, razmotrit ćemo malo pobliže, kako se dolazi do tog kuta φ_0. Po slici razabiramo, da projekcije komponenata puta prevaljena uz brzinu u u jedinici vremena, t. j. dužine $u_1 = KO$ i $u_2 = MK$ imadu isti pozitivni smjer, koji se podudara sa smjerom gledanja MO. Zato se izvor udaljuje od motrioca. Uz onaj kut φ, kako je na slici uzet, komponenta je u_1 veća od u_2. Raste li kut φ, komponenta u_1 opada, a u_2 raste, jer raste dužina normale IK, pa dakle i graničnog luka IM.

Uz $\varphi = \frac{\pi}{2}$ iščezne u_1, pa preostane samo u_2. Prijeđe li φ u drugi kvadrant, komponenta u_1 postane negativna, a u_2 stane se umanjivati. Na slici je još predočen onaj momenat, kad su te dvije komponente po apsolutnoj vrijednosti jednake. Put u jedinici vremena razložen je u komponente $NO = u_1$ i u komponentu predočenu graničnim lukom IO nad tetivom IN. Projekcija je te druge

[1]) No kako je φ_0 svagda veći od pravoga kuta, formule (6) i (7) u „Radu" 208, na str. 112., odnose se na nemogući slučaj, jer uz $\frac{\pi}{2}$ ne može biti $v' > v$.

komponente $u_2 = ON$. A kako su u_1 i u_2 protivnoga znaka, to je $u_1 + u_2 = 0$, pa je stoga $v' = v$.

Budući da je $\alpha = \pi - \varphi_0$, prema formuli (6) imamo

$$\cos \alpha = \text{th} \frac{u}{2}. \tag{15}$$

Po relaciji, koja postoji među kutom paralelnosti i pripadnom dužinom, znamo da je

$$\cos \prod\left(\frac{u}{2}\right) = \text{th} \frac{u}{2},$$

pa je tako doista

$$\alpha = \prod\left(\frac{u}{2}\right). \tag{16}$$

Točkom P raspolovimo dužinu $IO = u$, što predočuje brzinu v, kojom se giba izvor, pa u P uzdignimo normalu na tu dužinu. Potegnemo li iz O paralelu s tom normalom, tad nam ta paralela određuje neutralnu liniju viziranja, duž koje se poništava Dopplerov učinak.

Raste li φ još dalje preko φ_0, komponenta u_1 raste ostajući negativna, a u_2 opada, tako da projekcija puta ima smisao protivan nego li je smjer viziranja. Izvor se približava motriocu, pa zato moramo uzeti za omjer titrajnih brojeva

$$\frac{v'}{v} = e^{u_2 - u_1},$$

a to nam dade

$$\frac{v'}{v} = \frac{1 - \text{th}\, u \cos \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 u}}, \tag{17}$$

ili

$$\frac{v'}{v} = \text{ch}\, u - \text{sh}\, u \cos \varphi. \tag{18}$$

Bilješka o relativističkoj dinamici.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 3. juna 1919.

Napisao pravi član dr. V. Varićak.

Kod uniformnog gibanja, komu je brzina

$$\frac{v}{c} = \text{th}\, u \qquad (1)$$

put prevaljen u jedinici vremena dan je izrazom

$$\sigma = c\, \text{sh}\, u . \qquad (2)$$

Kako se ta odredba glede puta može zgodno primijeniti, pokazao sam na nekim specijalnim pitanjima iz optike,[1]) a ovdje ću dati o tom još jedan primjer.

Impuls I (veličinu gibanja) definirat ćemo, ne kao produkt mase i brzine, već kao produkt mase i puta prevaljena u jedinici vremena:

$$I = m\, \sigma = m\, c\, \text{sh}\, u . \qquad (3)$$

U klasičkoj je teoriji diferencijalni kvocijent kinetičke energije po brzini jednak impulsu. Odredimo li impuls s pomoću (3), energija će kinetička u teoriji relativnosti biti jednaka primitivnoj funkciji impulsa, isto kao i u klasičkoj mehanici.

Brzina v predočena je prema formuli (1) dužinom U, koja je određena jednadžbom

[1]) Rad *202*, str. 177, *208*, str. 110, *210*, str. 158.

$$\frac{U}{c} = \text{ar th}\, \frac{v}{c} . \qquad (4)$$

Kako je prema formuli (3)

$$I = m\, c\, \text{sh}\, \frac{U}{c} ,$$

bit će

$$E = m\, c \int_0^U c\, \text{sh}\, \frac{U}{c}\, d\, \frac{U}{c} = m\, c^2 \left(\text{ch}\, \frac{U}{c} - 1 \right) , \qquad (5)$$

ili

$$E = m\, c^2\, (\text{ch}\, u - 1) . \qquad (6)$$

To se još može pisati u obliku

$$E = 2m\, c^2\, \text{sh}^2\, \frac{u}{2} . \qquad (7)$$

Po jednadžbi (5) razbiramo da je derivacija kinetičke energije po brzini U jednaka impulsu

$$\frac{dE}{dU} = I .$$

Poradi relacije (1) prelazi (6) u poznati Einsteinov izraz za energiju

$$E = m\, c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) , \qquad (8)$$

dok nam (3) dade za impuls

$$I = \frac{m\, v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} . \qquad (9)$$

Definirajući impuls s pomoću jednadžbe (3), uvjeravamo se lako, da i u teoriji relativnosti vrijedi onaj poučak mehanike, po kom je sila jednaka derivaciji impulsa po vremenu. Ako u definiciji sile F mjesto derivacije brzine po vremenu, za akceleraciju uzmemo taku istu derivaciju puta prevaljena u jedinici vremena, tad je sila

$$F = m\,\dot{\sigma} = \frac{d}{dt}(m\,\sigma) = \frac{dI}{dt}. \qquad (10)$$

Uvrstivši ovamo $I = m\,c\,\mathrm{sh}\,u$ dobijemo poznati izraz

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\,v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right). \qquad (11)$$

Dovle se naši izvodi slažu s rezultatima teorije relativnosti, no sad nastupa jedna razlika.

Kao što je poznato transversalna je masa kvocijent impulsa i brzine, dok je longitudinalna jednaka derivaciji impulsa po brzini. Zamijenimo li i u tim definicijama brzinu s putem σ, iziđe, da su obje te mase jednake masi tijela, što ju ono ima kad miruje S obzirom na jednadžbu (3) izlazi naime

$$m_t = \frac{I}{\sigma} = m, \qquad m_l = \frac{d\,I}{d\,\sigma} = m.$$

Polarne otporne linije oslonaca kod lučnog nosača sa dva zglavka.

(S 13 slika.)

Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 26. marta 1919.

Napisao dr. Ivan Arnovljević, Beograd.

Svako čvrsto telo, koje prima utecaj spoljnih sila (tereta) i prenosi ga na čvrstu, tečnu ili vazdušnu sferu zemljinu, zovemo nosačem u širem smislu reči. Po tome je trup aeroplana i broda isto tako nosač kao što je greda tavanice ili mosta. U užem smislu reči pak nazivamo nosačem telo pravilna geometrijska oblika, koje primljene terete prenosi u nekoliko tačaka na čvrste tle zemljine.

Zadane spoljne sile (ili tereti u širem smislu reči) dejstvuju na nosač na dva načina. 1. Kontinualno na celu, ili na jedan deo njegove površine; takove sile nazivamo razdeljenim ili kontinualnim silama, kao što su na pr. pritisak vetra, teret snega na krovni nosač, gomila ljudstva na mostu. 2. Tereti dejstvuju u pojedinim linijama ili tačkama na nosač, takove terete zovemo pojedinačnim ili koncetrovanim teretima, kao što je na pr. pritisak točkova željezničkih kola na šine.

Sile, kojima nosač dejstvuje na svoju potporu (čvrste tle, voda ili vazduh) zovemo pritiscima na oslonce; njima suprotne i jednake su sile, kojima potpore na nosač dejstvuju, i koje nazivamo otporima (reakcijama) oslonaca. Otpori oslonaca mogu također biti razdeljeni (kao kod aeroplana, broda i uzdužnih pragova pod željezničkim šinama) ili koncentrovani u nekoliko tačaka (kao kod grede na dva ili više oslonaca).

Ako su otpori oslonaca kontinualni, oslanja se nosač neposredno na svoju potporu, ako su pak koncentrovani, onda je

oslanjanje obično posredno: Između čvrstih tala i nosača uvrštene su drvene, željezne ili zidane konstrukcije, koje zovemo stubovima ili osloncima u užem smislu reči.

Zadane t. j. poznate sile (tereti) i otpori oslonaca čine skupa sistem spoljnih sila, koje na nosač dejstvuju. Ako je nosač nepokretan, (a samo takove nosače imamo od sada na umu) mora sistem spoljnih sila biti uvek u ravnoteži. Zakoni statike daju nam sredstva, da iz poznatih spoljnih sila (zadanih tereta) nađemo otpore oslonaca. Međutim zakoni statike nisu za ovaj cilj uvek dovoljni, kao što ćemo docnije videti.

Prema razdeobi napadnih tačaka na nosaču i pravaca spoljnih sila dele se nosači na dve grupe. Ako se sve spoljne sile nalaze u jednoj ravni, koja je ujedno simetrijska ravan nosačeva, ili ako su dve i dve sile simetrične prema toj ravni, zovemo nosač ravnim nosačem. U suprotnom slučaju govorimo o prostornom nosaču. Često smo u stanju da prostorni nosač (osobito ako ima oblik paralelepipeda) raščlanimo u ravne nosače i tim statičko ispitivanje nosača uprostimo.

S konstruktivnog gledišta delimo nosače opet na dve grupe.

Ako gradivo nosača ispunjava kontinualno jednu površinu (koja je obično ravna) srazmerno male debljine, zovemo ga punim nosačem, ako je pak sastavljen iz delova, kojih su dve dimenzije prema trećoj (dužini) srazmerno male, i koji se u tehnici zovu štapovima, onda ga zovemo raščlanjenim ili rešetkastim nosačem. Primeri za pun ravan nosač su drvene grede, jednostavne ili iz ploča i ugaonika sastavljene željezne grede tavanica i manjih mostova; primeri za rešetkast ravan nosač su drveni ili željezni glavni nosači većih mostova i krovova. Zidano kube je pun prostoran nosač, a željezna konstrukcija, koja nosi pokrivač krovnog kubeta, izvodi se kao rešetkast prostoran nosač. Jedan duži svod na pr. pod železničkim nasipom, ili jedan potporni zid zamišljamo, da je ravnima, na dužinu objekta upravnim, podeljen na uže lamele i jednu takovu lamelu ispitujemo statički kao ravan pun nosač.

Zadane spoljne sile dejstvuju neposredno na nosač, ili posredno preko uvrštenih drugih nosača. Na pr. svod pod nasipom ili potporni zid opterećeni su neposredno pritiskom zemlje. Isto tako je železnička šina neposredno opterećena pritiskom točka. Za posredno opterećenje imamo primer u (podužnom) nosaču železničkog mosta. Na nosaču leže u izvesnim rastojanjima pragovi,

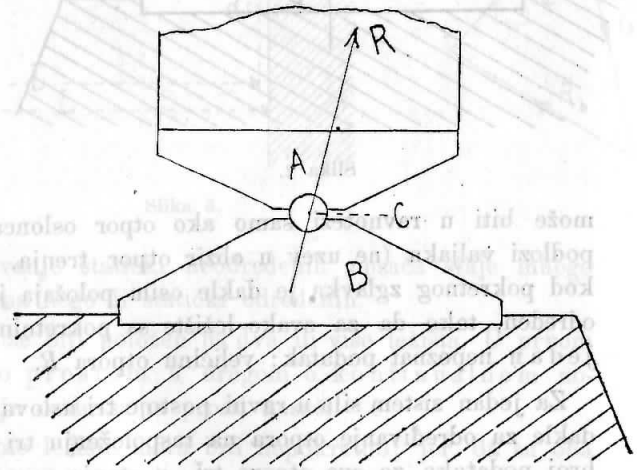
a na ovima šine. Teret železničkog voza prenosi se ovde na nosač samo u pojedinim stalnim tačkama, u kojima su pragovi položeni, dakle posredovanjem pragova. Tačke, u kojima se teret prenosi posredno na nosač, zovu se obično čvorovima*).

Tereti se još razlikuju u stalne i pokretne. U prve spadaju vlastita težina nosača i težina svih posrednih konstrukcija, koje na nosaču leže. Sav taj teret zove se i mrtvim teretom za razliku od korisnog tereta t. j. onog, radi kojeg je nosač građen.

Korisni teret može biti stalan ili pokretan. Tako je na pr. pritisak nasipa na potporni zid nepokretan koristan teret, jer je potpornom zidu zadatak, da nasip podupire. Za grede nad prozorima i vratima je zid nepokretan koristan teret itd. Mosni nosači pak imaju pokretan koristan teret kao železnička i obična kola, ljudstvo itd.

Spomenuli smo već, da nosači u užem smislu reči prenose prim ljene terete posredovanjem stubova na čvrste tle i to u nekoliko tačaka ili linija; drugim rečima otpori oslonaca su koncentrovane sile. Između nosača i stuba uvrštena su naročita tela od čelika ili željeza, koja imaju važan statički zadatak i koje zovemo ležištima. Otpor oslonca kao svaka sila određen je trima veličinama: intenzitetom, pravcem i položajem, ili što je isto, jednom tačkom svoje napadne linije.

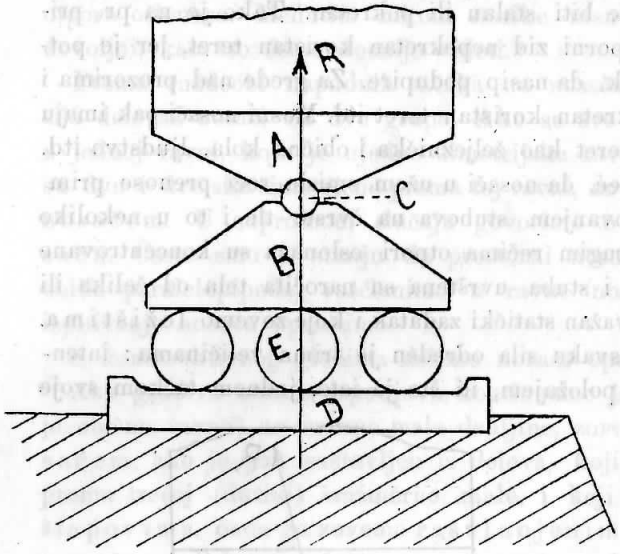
Ležišta ravnih nosača (o kojima je od sada jedino govor) konstrujisana su tako, da je položaj oslončeva otpora uvek određen. Sastoje se iz dva dela A i B prizmatična oblika (Sl. 1. i 2.), od kojih je A pričvršćen za nosač, a B leži (neposredno ili posredno) na stubu. Oba tela imaju cilindričan žleb, kojim obuhvataju



Slika 1.

*) Kod rešetkatskih nosača zovu se čvorovima tačke, u kojima se tri ili više štapova sastaju. U tim tačkama leže uvek i posredni (poprečni) nosači ili pragovi, tako da se kod rešetkastog nosača oba značenja reči „čvor“ poklapaju.

cilindrični čep C. Što je manji otpor trenja na obimu čepa, tim strože možemo pretpostaviti, da otpor oslonca prolazi kroz središte čepa. Konstrukciju složenu iz tela A B i C zovemo zglavkom. Na sl. 1. položeno je telo B nepomično na površinu stuba, stoga se ovo ležište zove ležište sa nepokretnim zglavkom. Za svaki nepokretni zglavak imamo dakle za otpor oslonca dva nepoznata podatka: njegovu veličinu i pravac.



Slika 2.

Kad telo B stavimo na dva ili više cilindrična valjka E istog prečnika, koji leže na ploči D, dobivamo ležište sa pokretnim zglavkom (sl. 2.), jer se sistem A B C može relativno prema ploči D, dakle prema stubu kretati paralelno ravnima, među kojima su valjci, i upravno na osu valjaka. Sistem A B C može biti u ravnoteži samo ako otpor oslonca stoji upravno na podlozi valjaka (ne uzev u obzir otpor trenja, koji je neznatan); kod pokretnog zglavka je dakle osim položaja još i pravac otpora određen, tako da za svako ležište sa pokretnim zglavkom imamo jedan nepoznat podatak: veličinu otpora R.

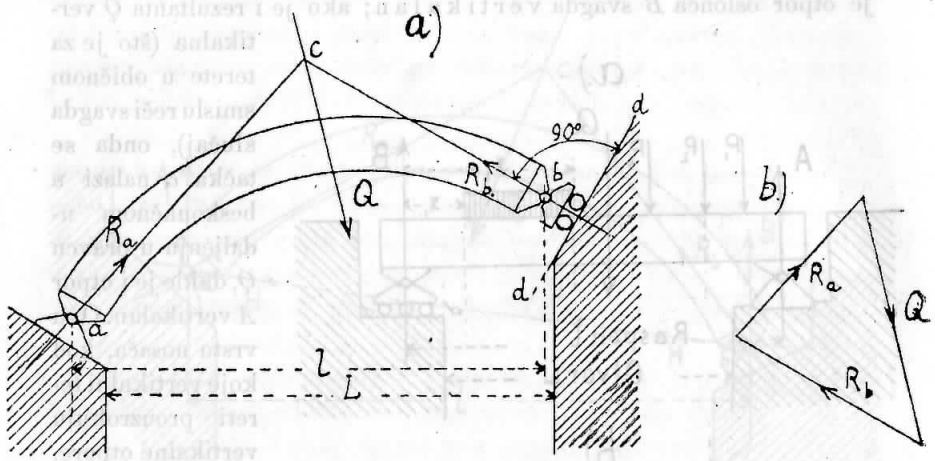
Za jedan sistem sila u ravni postoje tri uslova ravnoteže; imamo dakle za određivanje otpora na raspoloženju tri jednačine. Ako je broj podataka za sve otpore tri, u stanju smo da nađemo otpore jedino s pomoću statičkih zakona. Takove nosače, kod kojih je to moguće, zovemo statički određenim nosačima.

Ako je broj podataka manji od tri, onda je nosač labilan t. j. na njemu ne može svaki proizvoljan sistem sila da stoji u ravnoteži. Labilni nosači su svakako isključeni od primene.

Ako je pak broj podataka veći od tri, onda statički uslovi ravnoteže nisu dovoljni za određivanje otpora; takove nosače zovemo statički neodređenima. U tom slučaju mogu se otpori oslonaca odrediti samo na osnovu deformacije nosača, dakle s pomoću teoremâ nauke o elastičnosti.

Da nađemo otpore oslonaca statički određenog nosača, dovoljno je da poznajemo sve terete po veličini, pravcu i položaju na nosaču; oblik i dimenzije nosača ne moramo poznavati.*)

Za određivanje otpora oslonaca statički neodređenog nosača pak potrebno je još da poznajemo sve dimenzije nosačeve. Iz ovoga je



Slika 3.

jasno, da projektovanje statički neodređenih nosača staje mnogo više truda i vremena nego li statički određenih.

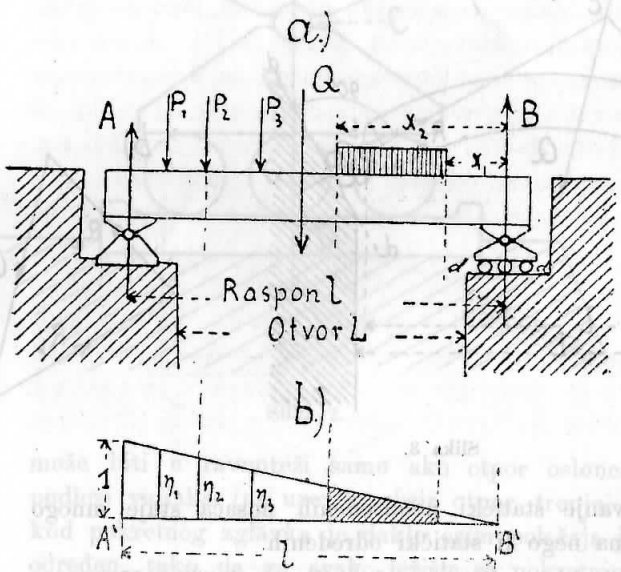
Ravan nosač može biti položen na dva ili više ležišta. U prvom slučaju govorimo o prostom u drugom o kontinualnom nosaču. Nas interesuju ovde samo prosti nosači.

Jasno je, da jedno ležište mora biti nepokretno; jer da su oba ležišta pokretna, bio bi ceo nosač pokretan, dakle labilan. Ako jedno ležište načinimo nepokretnim a drugo pokretnim, dobivamo nosač prestavljen na sl. 3. Broj nepoznatih podataka za otpore je

*) Pri tome pretpostavljamo, da su deformacije nosača usled dejstva tereta tako malene, da možemo računati kao da se konfiguracija tereta nije promenila, t. j. kao da je nosač apsolutno krut.

tri, dakle ravan broju statičkih jednačina: nosač je statički određen. Očigledno nam to kazuje geometrijska metoda. Neka je Q rezultanta svih zadanih tereta na nosaču. Uslov je ravnoteži među silama R_a R_b i Q, koje nosač napadaju, da se njihovi pravci seku u jednoj tački. Kod nosača na sl. 3. je sila R_b po pravcu i položaju određena, dakle je i tačka c kao presek pravih R_b i Q poznata. Prava, koja spaja središte čepa a sa tačkom c je traženi pravac, u kojoj dejstvuje otpor R_a. Pošto je veličina Q poznata, u stanju smo sada, da s pomoću trougla sila (sl. 3*b*) nađemo i veličine otpora R_a i R_b.

Ako podlogu valjaka *d-d* načinimo horizontalnom (sl. 4), onda je otpor oslonca B svagda vertikalan; ako je i rezultanta Q vertikalna (što je za terete u običnom smislu reči svagda slučaj), onda se tačka c nalazi u beskonačnom udaljenju u pravcu Q, dakle je i otpor A vertikalan. Ovu vrstu nosača, kod koje vertikalni tereti prouzrokuju vertikalne otpore, zovemo — prostom gredom (za razliku od kontinualne grede na više od dva oslonca). Prosta greda je dakle specijalni slučaj statički određenog nosača na sl. 3. Ona je najprostija ali i najvažnija vrsta ravnih nosača i to sa teoretskog i praktičkog gledišta. Sa prvoga zato, što se na teoriji proste grede osnivaju teorije svih ostalih vrsta nosača, a sa drugog gledišta stoga, što se ogromna većina nosača za mosne, krovne i druge građevine izvodi kao prosta greda. Valja naglasiti, da je za definiciju proste grede, (kao i svake vrste nosača) od bitna značenja samo vrsta i položaj ležišta, a ne oblik nosača. Prosta greda može dakle imati

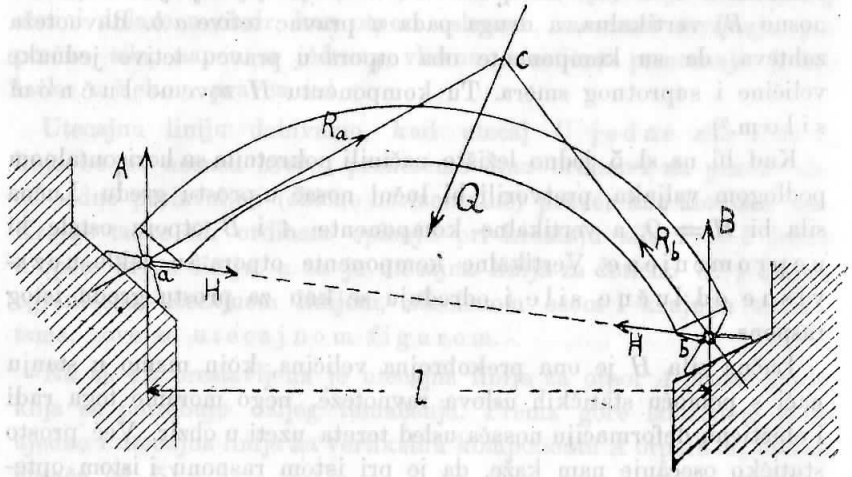


Slika 4.

pravu ili krivu osu. Ako ležišta nisu na krajevima grede, zovemo je prostom gredom sa prepustima (Kragarm).

Nosač na sl. 5. ima dva nepokretna ležišta, svega dakle četir nepoznata podatka za otpore. Za određivanje ovih nedostaje nam 4—3 = 1 statička jednačina, nosač je jedanput statički neodređen, i zove se lučnim nosačem sa dva zglavka (za razliku od statički određenog lučnog nosača sa tri zglavka i od triput statički neodređenog lučnog nosača bez zglavaka o kojima ovde neće biti govora).

Grafična prestava kaže nam neposredno, da je nosač sl. 5. jedanput statički neodređen. Za otpore R_a i R_b znamo, da prolaze



Slika 5.

kroz tačke a odnosno b (središta čepova) i da se seku u jednoj tački c na rezultanti Q zadanih tereta. Pravci obih otpora su nepoznati, dakle je položaj tačke c na pravoj Q također nepoznat. Taj položaj bi jednim podatkom (dužinom) bio određen, dakle je nosač jedanput statički neodređen. Zamislimo, da se na lučnom nosaču kreće jedna vertikalna sila P proizvoljne veličine i da smo za svaki njen položaj našli tačku c, u kojoj se otpori R_a i R_b seku. Tačke c za sve položaje tereta P čine jednu krivu liniju, koja je važna za statičko ispitivanje luka i zove se otpornom linijom (Kämpferdrucklinie).

Od svih ravnih nosača na dva oslonca lučni nosač sa dva zglavka je u praksi posle proste grede najčešće primenjivan, osobito za glavne nosače većih mostova.

Bitna razlika između grede i lučnog nosača (prostih, sa prepustom ili kontinualnih) u statičkom pogledu može se najkraće ovako izraziti: Na gredi prouzrokuju vertikalni tereti vertikalne otpore u osloncima, kod lučnog nosača pak prouzrokuju vertikalni tereti kose otpore u osloncima upravljene prema sredini otvora.[1])

Pravu, koja spaja tačke a i b (sl. 5) zovemo tetivom luka; horizontalna projekcija tetive $a\ b$ je raspon luka. Najveće rastojanje ose lučne od tetive (kod simetričnog luka u sredini raspona) zove se strela lûka.

Pretpostavljamo od sada, da na lučni nosač dejstvuju vertikalni tereti: Otpori R_a i R_b usled toga tereta neka su nam poznati. Razložimo ih u dve komponente (sl. 5) od kojih je jedna (A odnosno B) vertikalna, a druga pada u pravac tetive $a\ b$. Ravnoteža zahteva, da su komponente oba otpora u pravcu tetive jednake veličine i suprotnog smera. Tu komponentu H zovemo lučnom silom.[2])

Kad bi na sl. 5. jedno ležište načinili pokretnim sa horizontalnom podlogom valjaka, pretvorili bi lučni nosač u prostu gredu. Lučna sila bi $H = 0$, a vertikalne komponente A i B otpora ostale bi nepromenjene. Vertikalne komponente otpora su dakle nezavisne od lučne sile i određuju se kao za prostu gredu istog raspona.

Lučna sila H je ona prekobrojna veličina, koju nismo u stanju naći s pomoću statičkih uslova ravnoteže, nego moramo toga radi i elastičnu deformaciju nosača usled tereta uzeti u obzir. Već prosto statičko osećanje nam kaže, da je pri istom rasponu i istom opterećenju H tim veće, što je manja strela luka, dakle da H zavisi od oblika nosača.

Elastična teorija nosača može se osnovati na opštem zakonu mehanike, na principu virtualnih pomeranja; no mogu se svi teoremi izvesti i na osnovu elastične linije nosača, i taj drugi put je u razvitku teorije stariji.

Ako je korisni teret na nosaču pokretan, onda svakom njegovom položaju odgovaraju druge vrednosti komponenata A, B i H. Za

[1]) Treći glavni tip nosača „obešeni mostovi“ (Hängebrücken) postaju od lučnog nosača, kad ovaj preklopimo oko njegove podužne ose. Vertikalni tereti prouzrokuju sada kose otpore upravljene od sredine otvora.

[2]) „Horizontalni potisak“ (Horizontalschub) identičan je sa lučnom silom (Bogenkraft) samo u specijalnom slučaju, kad je tetiva $a\ b$ horizontalna; stoga je drugi naziv tačniji.

lako i pregledno određivanje onog položaja, koji prouzrokuju ekstremne vrednosti A, B, odnosno H (t. zv. najopasnijih položaja) služe utecajne linije. Već ime nam kaže, da se ne ograničavaju na otpore oslonaca, nego da služe za određivanje svakog utecaja U jednog pokretnog sistema tereta. Mogućnost, da se neki utecaj U prestavi utecajnom linijom, vezana je za dva uslova. 1. Da je utecaj U, koji prouzrokuje sila P, proporcionalan toj sili, dakle da ima oblik $U = P.\ \eta$, gde η znači koeficijenat nezavisan od P. 2. Da je utecaj U, koji prouzrokuje neki sistem silā, ravan algebarskom zbiru utecaja pojedinih sila $P_1\ P_2 \ldots$, drugim rečima, da utecaj podleži zakonu superpozicije.

Ta dva uslova ispunjena su kod svih utecaja, koji u tehničkoj statici dolaze u obzir, kao otpori oslonaca, momenti savijanja, poprečne sile, napon u jednom vlaknu, elastično pomeranje jedne tačke u nekom pravcu itd.

Utecajnu liniju dobivamo, kad utecaj U jedne sile $P = 1$, koja se po nosaču kreće, prenesemo kao ordinatu na pravu sile, od jedne proizvoljne (obično horizontalne) prave, kao abscisne ose. Krajne tačke tih ordinata opisuju pri kretanju sile $P = 1$ jednu u opšte krivu liniju, a ta je utecajna linija za dotično U.*) Figura ograničena utecajnom linijom, abscisnom osom i krajnim ordinatama, zove se utecajnom figurom.

Na sl. 4 b prestavljena je utecajna linija za otpor A proste grede, koja ne potrebuje daljeg tumačenja. Prema gore izloženom je to ujedno i utecajna linija za vertikalnu komponentu A otpora R_a lučnog nosača (sl. 5).

S pomoću utecajne linije nalazimo brzo utecaj jednog sistema sila. Na pr. da nađemo otpor oslonca A, koji prouzrokuje sistem od tri tereta $P_1\ P_2\ P_3$, izmerimo ordinate utecajne linije (4 b) pod zadanim silama, i dobivamo traženi otpor $A = P_1\ \eta_1 + P_2\ \eta_2 + P_3\ \eta_3$.

Utecaj jednako razdeljenog tereta p na jedinicu dužine, koji leži na dužini $(x_2 — x_1)$ sl. 4. ravan je

$$U = \int_{x_1}^{x_2} p dx.\ \eta = p \int_{x_1}^{x_2} \eta dx = p\ T,$$

*) Utecajne linije prvi je upotrebio prof. E. Winkler 1868. god. na ispitivanje lučnih nosača, i nazvao ih je „linijama napona“ (Spannungskurven). Ime „utecajna linija“ (Influenzlinien) prvi je upotrebio prof. I. Weyrauch 1873. god.

dakle proporcionalan površini utecajne figure između krajnih ordinata η_1 η_2.

Za sve statički određene utecaje sastoji se utecajna linija iz jedne ili više pravih linija, za statički neodređene utecaje pak iz algebarskih krivih linija drugog ili višeg reda.

Do sada smo prećutno pretpostavili, da je nosač neposredno opterećen. Ako je nosač posredno (samo u čvorovima) opterećen, onda je utecajna linija za koji bilo utecaj U poligon sa pravim stranama, upisan u utecajnu liniju za neposredno opterećenje; temena poligona leže u vertikalama čvorovā.

Iz svega, što je do sada o utecajnim linijama rečeno, može se videti, da se utecaji mogu prestaviti utecajnim linijama, ako osim gore navedena dva uslova (proporcionalnost sa uzrokom i superpozicija utecaja više uzrokā) još i taj ispunjavaju, da su jednim podatkom određeni, t. j. da su skalarne veličine. Mi nismo u stanju da konstrujišemo utecajnu liniju za otpore oslonaca R_a i R_b lučnog nosača, jer kad uzrok $P = 1$ menja svoj položaj, menjaju sile R_a i R_b kao vektori svoju veličini i pravac. Moramo dakle otpore R_a, R_b razložiti u komponente stalnih pravaca A i H, odnosno B i H i za svaku komponentu kao skalarnu veličinu naći utecajnu liniju.

Otpor oslonca lučnog nosača sa dva zglavka određen je dakle dvema utecajnim linijama. Iz ove dve utecajne linije možemo naći jednu treću liniju, koja nam prestavlja relaciju između pravca i veličine otpora K_a za proizvoljno pokretno vertikalno opterećenje.

Time dolazimo na temu, kojoj su ovi redovi namenjeni.

Zamislimo, da je za sve položaje nekog proizvoljnog vertikalnog opterećenja određen otpor K_a i da su svi ti vektori K_a preneseni od tačke a (središta čepa) koju napadaju; krajne tačke tih vektora opisuju krivu liniju, koju ćemo nazvati polarnom otpornom linijom, jer kad tačku a uzmemo za početak polarnog koordinatnog sistema, određena je svaka tačka te linije jednim radius-vektorom K_a.

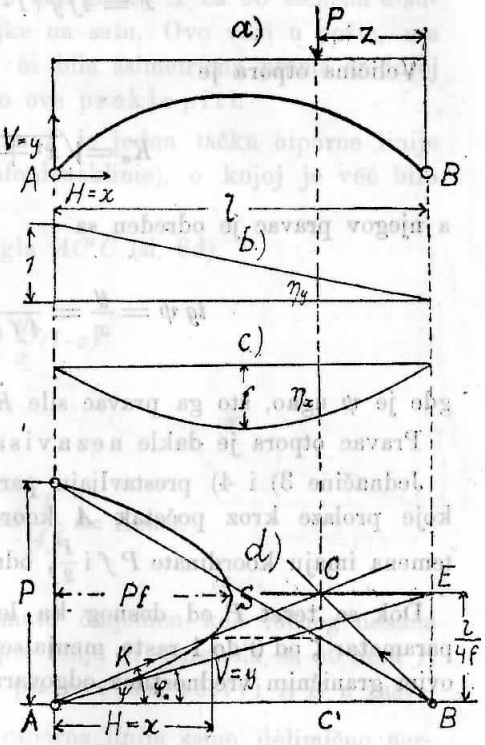
Za analitičko tretiranje polarne otporne linije (ili kraće K-linije) pretpostavićemo, da oba ležišta A i B lučnog nosača leže u istoj visini, što je i običniji slučaj u primeni. Tetiva $a\,b$ je dakle horizontalna, a lučna sila je identična sa horizontalnom komponentom H otpora K_a.

Ortogonalne koordinate jedne tačke K-linije su horizontalni potisak H i vertikalni otpor V (pre sa A označen) proste grede istog raspona. Dakle je $x = H$, $y = V$. Komponente V i H su funkcije opterećenja i jednog promenljivog parametra, koji određuje položaj tereta na nosaču. Kad iz jednačina za V i H eliminišemo parametar, dobivamo relaciju između promenljivih x i y t. j. jednačinu K-linije u ortogonalnim koordinatama.

O utecajnoj liniji za V (sa ordinatama η_y) bilo je već govora; prestavljena je na sl. 4 *b*. Za utecajnu liniju H znamo, da su joj ordinate η nad ležištima ravne nuli, i da prema sredini raspona rastu. Iz napred rečenog znamo, da je kriva linija. Elastična teorija nosačā nas uči, da je utecajna linija H za lučne nosače sa dva zglavka, kod kojih je odnos strele prema rasponu mali, i visina preseka neprimetno promenljiva, parabola sa vertikalnom osom; strela f parabole je funkcija oblika i dimenzijā nosačevih, mi je smatramo kao zadanu.

Veličine η_x η_y i f su nulte dimezije t. j. neimenovani brojevi, jer su odnosi dveju veličina istih dimenzija. Koordinate x, y K-linije imaju dimenziju sile, kao komponente jedne sile K_a.

Prelazimo na izvođenje jednačina K-linije za neka prostija opterećenja.



Slika 6.

I. Na nosaču leži jedan koncentrovani teret P.

Teret P u rastojanju z od desnog ležišta B (sl. 6) izaziva u levom osloncu A vertikalan otpor

$$y = P\eta_y = P\frac{z}{l} \ldots \quad (1)$$

i lučnu silu

$$x = P\eta_x = P\frac{4f}{l^2}z(l-z)\ldots \quad (2)$$

Kad uvedemo za promenljivi parametar odnos $\frac{z}{l} = \zeta$, glase parametrične jednačine polarne otporne linije

$$y = P\zeta \ldots . 1') \text{ i } x = 4Pf\zeta(1-\zeta)\ldots 2')$$

eliminacijom parametra ζ dobivamo iz ovih jednačinâ

$$x = \frac{4fy}{P}(P-y)\ldots \quad (3)$$

ili za $P = 1$

$$x = 4fy(1-y)\ldots \quad (4)$$

Veličina otpora je

$$K_a = \sqrt{x^2+y^2}\ldots \quad (5)$$

a njegov pravac je određen sa

$$tg\,\psi = \frac{y}{x} = \frac{1}{4f(1-\zeta)}\cdots \quad (6)$$

gde je ψ ugao, što ga pravac sile K_a sa horizontalom zatvara.

Pravac otpora je dakle nezavisan od veličine sile P.

Jednačine 3) i 4) prestavljaju parabole sa horizontalnom osom, koje prolaze kroz početak A koord. sistema (sl. 6 *d*). Njihova temena imaju koordinate $P\,f$ i $\frac{P}{2}$, odnosno f i $\frac{1}{2}$.

Dok se teret P od desnog ka levom osloncu kreće, t. j. dok parametar ζ od 0 do 1 raste, menja se veličina otpora K_a od 0 do P; ovim graničnim vrednostima odgovaraju po obrascu 6) pravci

$$tg\,\psi_0 = \frac{1}{4f} \text{ i } tg\,\psi_1 = \infty\ldots \quad (7)$$

Izvodi jednačinâ 1') i 2') po ζ daju nam nagib paraboline tangente

$$tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4f(1-2\zeta)}\cdots \quad (8)$$

$$\text{Za } \zeta = 0 \text{ je } tg\,\varphi_0 = \frac{1}{4f}\cdots \quad (8')$$

Iz prvog obrasca 7) i 8') vidimo, da je $\psi_0 = \varphi_0$, t. j. pravac otpora $K_a = 0$ (kad P leži nad osloncem B) indentičan je sa parabolinom tangentom u početku A.

Iz navedenih obrazaca a i neposredno iz sl. 6d (sa $P = 1$) vidimo, da polarna otporna linija za $P = 1$ postaje iz utecajne linije za H, kad abscise ove linije skratimo u razmeri $1 : l$ i tako dobivenu figuru obrnemo oko tačke A za 90 stepena u suprotnom smislu kretanja kazaljke na satu. Ovo važi u opšte, ma koji oblik imala H-linija. Kad bi bila asimetrična prema srednjoj vertikali, morali bi je prvo oko ove preklopiti.

Presek C otpora K sa teretom P je jedna tačka otporne linije u običnom smislu reči (Kämpferdrucklinie), o kojoj je već bilo govora.

Ordinata $C'C = \eta$ je iz trougla $AC'C$ (sl. 6d).

$$\eta = \frac{y}{x}(l-z)$$

i s obzirom na obrazac 6)

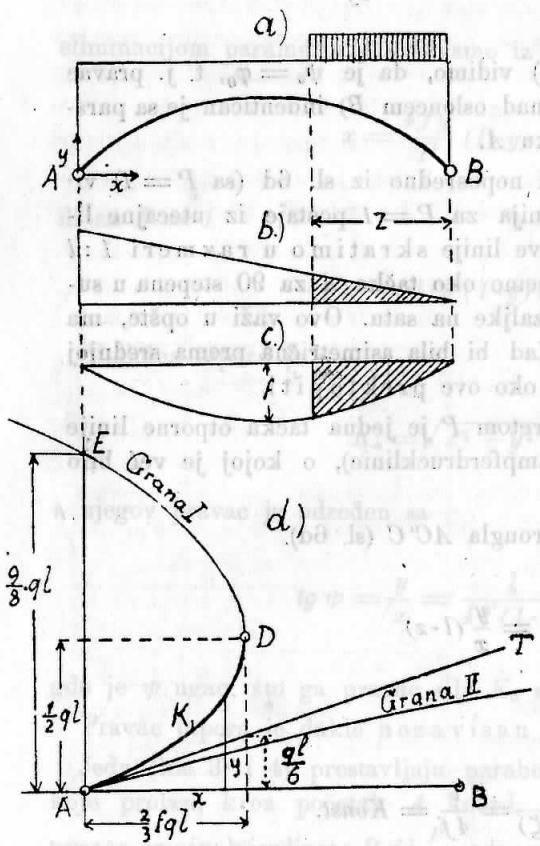
$$\eta = \frac{l-z}{4f(1-\zeta)} = \frac{l}{4f} = Konst.$$

Ovaj rezultat kazuje nam poznatu činjenicu kod lučnog nosača sa dva zglavka: Ako je utecajna linija H parabola sa strelom f, onda je otporna linija prava paralelna tetivi AB u rastojanju $\frac{l}{4f}$ od ove. (Na sl. 6d je otporna linija samo delimično ucrtana). Tangenta u tački A parabole seče vertikalu oslonca B u jednoj tački E otporne linije, saglasno sa prvom jednačinom 7).

II. Teret je jednako razdeljen i promenljive dužine.

1) Teret nastupa od B prema A.

Jednako razdeljen teret q na jedinicu dužine, koji je od ležišta B nastupio za dužinu z (sl. 7a), izaziva u levom osloncu A vertikalni otpor



Slika 7.

$$y = \frac{qz^2}{2l} \cdots \quad (9)$$

i lučnu silu

$$x = \frac{4fq}{l^2}\int_0^z z\,(l-z)\,dz = \frac{2fq}{3}\,\frac{z^2}{l^2}\,(3l-2z) \cdots \quad (10)$$

Sa smenom $\zeta = \frac{z}{l}$ glase parametrične jednačine polarne otporne linije za ovo opterećenje (koju ćemo kraće K_1 — linijom zvati):

$$y = \frac{ql}{2}\,\zeta^2, \cdots \quad (9')$$

$$x = \frac{2fql}{3}\,\zeta^2\,(3-2\zeta) = \frac{4f}{3}y\,(3-2\zeta); \cdots \quad (10')$$

Eliminacijom parametra ζ iz 9') i 10') dobivamo jednačinu K_1-linije

$$x = 4fy\left[1 \mp \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2y}{ql}}\right] \cdots \quad 11)$$

ili u racionalnom obliku

$$128\,\frac{f^2}{ql}\,y^3 - 144f^2y^2 + 72fxy - 9x^2 = 0; \cdots \quad (11')$$

Jednačina je trećeg stepena, prestavlja dakle krivu liniju trećeg reda (sl. 7d). Dvoma znacima u jedn. 11) odgovaraju dve grane I (—) i II (+) krive linije, koje polaze iz tačke A. Prava AT je njihova zajednička tangenta u tački A (povratna tangenta, Rückkehrtangente), njena jednačina glasi

$$y = \frac{1}{4f}\,x \cdots \quad (12)$$

Povratna tangenta je ujedno i osa kose simetrije, a pravac simetrije je paralelan abscisnoj osi.

Jednačina 11) prestavlja granu I ili II prema tome, dali iz jedn. 9') stavimo u jedn. 10') $\zeta = \pm\sqrt{\frac{2y}{ql}}$ sa gornjim ili donjim znakom. U našem statičkom problemu ima samo pozitivno ζ smisla, dolazi dakle samo grana I u obzir i od ove samo onaj deo, koji odgovara intervalu parametra od 0 do 1. U jednačini 11) važi dakle gornji znak.

Pravac otpora, t. j. njegov nagib ψ prema horizontali sledi iz 10')

$$tg\,\psi = \frac{y}{x} = \frac{3}{4f\,(3-2\zeta)} \cdots \quad 13)$$

U neopterećenom stanju ($\zeta = 0$) je po obrascu 13) pravac otpora $K_1 = 0$:

$$tg\,\psi_0 = \frac{1}{4f}$$

a to je prva jednačina 7); ψ_0 je, kao što iz jedn. 12) sledi ujedno i nagib povratne tangente AT. Parabolina tangenta AE (sl. 6d) i povratna tangenta AT (sl. 7d) imaju isti pravac, što se iz njihovog statičkog značenja neposredno uviđa.

Za puno opterećenje ($\zeta = 1$) postizava ugao ψ svoju najveću vrednost, koja je određena sa

$$tg\,\psi_1 = \frac{3}{4f}\cdots \qquad (14)$$

dakle je $tg\,\psi_1 = 3\,tg\,\psi_0$.

Izvođenjem jedn. 9') i 10') po ζ dobivamo za nagib tangente u jednoj tački krive K_1

$$tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4f\,(1-\zeta)}\cdots \qquad (15)$$

Ova je jednačina identična sa jedn. 6). Na statičko značenje ovoga vratićemo se docnije.

Za puno opterećenje raspona ($\zeta = 1$) daje jedn. 15) vrednost $tg\,\varphi_1 = \infty$ t. j. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. Koordinate tačke D (sl. 7d), u kojoj je tangenta paralelna ordinatnoj osi, dobivamo iz jedn. 9') i 10') sa $\zeta = 1$:

$$x_D = \frac{2}{3} fql \text{ i } y_D = \frac{ql}{2}.$$

Dok jednako razdeljeni teret napreduje od B do A, opisuje krajna tačka vektora (otpora A) krivu liniju AD; samo taj deo grane I ima statičko značenje.

Grana I seče ordinatnu osu u tački E. Jednačinu 11) zadovoljavaju tačke $x = 0$, $y = 0$, t. j. početak A, i $x = 0$, $y = AE = \frac{9}{8} ql$, tačka E. Krivu AD možemo tačku po tačku konstrujisati na ovaj način. Jednačina 9') prestavlja parabolu sa vertikalnom osom kroz desni oslonac B i temenom u abscisnoj osi. Ordinata njena nad levim osloncem je $\frac{ql}{2}$. Sa zadanim opterećenjem q možemo ovu parabolu (koju ćemo V-parabolom zvati) lako konstrujisati.

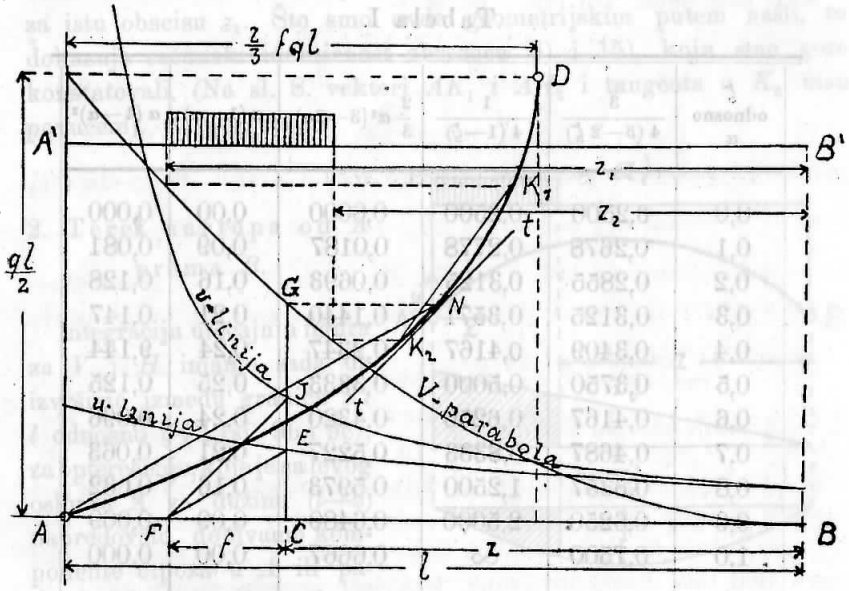
Jednačinu 13) pišimo kraće

$$tg\,\psi = \frac{y}{x} = \frac{u}{f}\cdots \qquad (13')$$

gde je

$$u = \frac{3}{4\,(3-2\,\zeta)}\cdots \qquad (16)$$

jedîno funkcija brojne veličine ζ i nezavisna od opterećenja. Ordinate ove hiperbole (u-linije) izračunate su u prvoj koloni tabele I za abscisne intervale od $0{\cdot}1$. S pomoću tih ordinata možemo lako nacrtati u-liniju. Sa V-parabolom i u-linijom možemo na osnovu jednačine 13') za svako ζ brzo naći odgovarajuću tačku x, y polarne otporne linije AD. Na sl. 8. izvedena je konstrukcija za



Slika 8.

$\zeta = 0{\cdot}7$, t. j. $\frac{z}{l} = \frac{BC}{AB} = 0{\cdot}7$. Toj vrednosti odgovaraju $CG = y$ i $CE = u$. Na abscisnoj osi prenesemo od C na levo $CF = f$ i povučemo iz A paralelu sa FE. Ova seče horizontalu iz tačke G u traženoj tački N polarne otporne linije. Brojne veličine f i u moraju se dakako u istoj razmeri prenositi.

Tangentu t-t otporne linije u tački N možemo takođe lako konstrujisati.

Jednačinu 15) pišimo u obliku

$$tg\ \varphi = \frac{v}{f} \cdots \quad (15')$$

gde je

$$v = \frac{1}{4(1-\zeta)} \cdots, \quad (17)$$

takođe funkcija samo brojne veličine ζ i izračunata u drugoj koloni tabele I.

Tabela I.

ζ odnosno α	$\frac{3}{4(3-2\zeta)}$	$\frac{1}{4(1-\zeta)}$	$\frac{2}{3}\alpha^2[3-2\alpha)$	$\alpha(1-\alpha)$	$\alpha(1-\alpha)^2$
0,0	0,2500	0,2500	0,0000	0,00	0,000
0,1	0,2678	0,2778	0,0187	0,09	0,081
0,2	0,2855	0,3125	0,0693	0,16	0,128
0,3	0,3125	0,3571	0,1440	0,21	0,147
0,4	0,3409	0,4167	0,2347	0,24	9,144
0,5	0,3750	0,5000	0,3333	0,25	0,125
0,6	0,4167	0,6250	0,4320	0,24	0,096
0,7	0,4687	0,8333	0,5227	0,21	0,063
0,8	0,5357	1,2500	0,5973	0,16	0,032
0,9	0,6250	2,5000	0,6480	0,09	0,009
1,0	0,7500	∞	0,6667	0,00	0,000

S pomoću ove tabele prenesene su ordinate v-linije na sl. 8. u istoj razmeri kao i ordinate u-linije. Tačci N na pr. odgovara vrednost $v = CJ$.

Po obrascu 15') je tangenta na K_1-liniju u tačci N paralelna pravoj FJ. S pomoću K_1-linije, koju smo na ovaj način u stanju da konstrujišemo sa proizvoljnom tačnošću, nalazimo brzo veličinu i pravac otpora i za delimično opterećenje nosača jednako razdeljenim teretom (sl. 8.) Teret q na jedinicu dužine, koji se prostire na dužinu z_1 prouzrokuje u levom osloncu otpor, koji po veličini i pravcu prestavlja vektor AK_1, a opterećenju dužine z_2 odgovara otpor AK_2.

Opterećenju dužine $(z_1—z_2)$ odgovara po principu paralelograma sila geometrijska diferencija vektora AK_1 i AK_2 a to je tetiva K_1K_2 polarne linije. Vektor K_1K_2 prenesen na tačku A prestavlja dakle otpor oslonca A usled delimičnog opterećenja.

Zamislimo, da se dužina z_1 postepeno smanjuje, tačka K_1 približuje se na krivoj AD tački K_2; kad se z_1 izjednači sa z_2, pada K_1 na K_2, od tetive K_1K_2 postaje tangenta u K_2, a opterećenje je sada koncentrovana sila $q\,dx$. Iz ovoga zaključujemo, da tangenta na K_1-liniju u tački K_2 kao pravac otpora usled jedne koncentrisane sile mora biti paralelna radiusvektoru parabole na sl. 6. za istu obscisu z_2. Što smo ovde geometrijskim putem našli, to dokazuje računski identičnost obrazaca 6) i 15), koju smo gore konstatovali. (Na sl. 8. vektori AK_1 i AK_2 i tangenta u K_2 nisu povučeni).

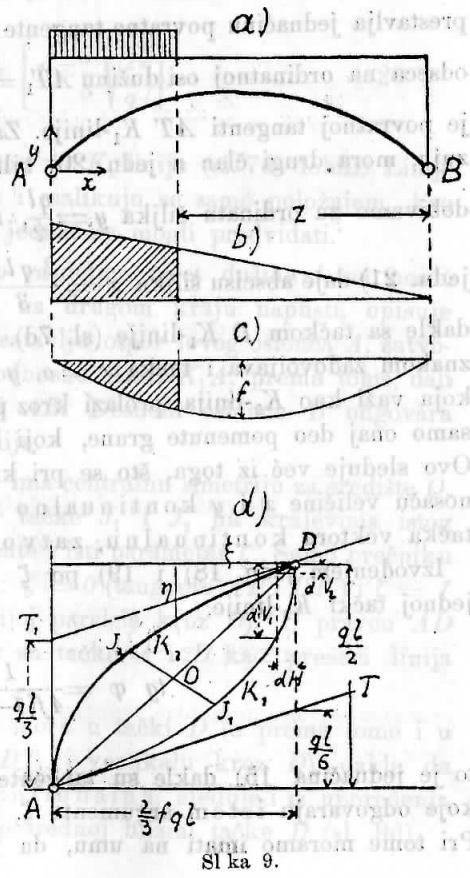
2. Teret nastupa od A prema B.

Integraciju utecajnih figura za V i H imamo sada da izvršimo između granica z i l odnosno ζ i 1 (sl. 9b i 9c); za opterećenje, koje je sa levog oslonca A za dužinu $(l—z)$ napredovalo, dobivamo komponente otpora u A ili parametrične jednačine polarne linije otpora (kraće K_2-linije).

$$y = \frac{ql}{2}(1-\zeta^2) \cdots \quad (18)$$

$$x = \frac{2fql}{3}\left[1-\zeta^2(3-2\zeta)\right] \cdots \quad (19)$$

eliminacijom parametra ζ iz obih jednačina dobivamo jednačinu K_2-linije



Slika 9.

$$x = 4f\left(y - \frac{ql}{3}\right) \pm \frac{4fql}{3}\left(1 - \frac{2y}{ql}\right)^{\frac{3}{2}} \ldots \quad (20)$$

li u racionalnom obliku

$$128\frac{f^2}{ql}y^3 - 48f^2y^2 - 72fxy + 24fqlx + 9x^2 = 0 \ldots \quad (20)$$

U jednačini 20) važi gornji znak za pozitivne vrednosti ζ, dakle ima samo ta grana krive linije statičko značenje.

Prvi član jedn. 20) rešen po y

$$y = \frac{ql}{3} + \frac{1}{4f}x \ldots \quad (21)$$

prestavlja jednačinu povratne tangente DT_1 K_2-linije. Tangenta DT_1 odseca na ordinatnoj osi dužinu $AT_1 = \frac{ql}{3}$ i po jedn. 12) paralelna je povratnoj tangenti AT K_1-linije. Za šiljak, koji obe grane obrazuju, mora drugi član u jedn. 20) bili ravan nuli. Iz ovog uslova dobivamo za ordinatu šiljka $y = \frac{ql}{2}$, a ova vrednost stavljena u jedn. 21) daje abscisu šiljka $x = \frac{2\,qlf}{3}$; šiljak K_2-linije identičan je dakle sa tačkom D K_1-linije (sl. 7d). Jednačinu 20) sa gornjim znakom zadovoljava i tačka $x = o$, $y = o$, t. j. grana krive 20), koja važi kao K_2-linija, prolazi kroz početak A. Kao K_2-linija važi samo onaj deo pomenute grane, koji leži između tačaka A i D. Ovo sleduje već iz toga, što se pri kretanju razdeljenog tereta na nosaču veličine x i y kontinualno menjaju, dakle opisuje krajna tačka vektora kontinualnu, zatvorenu krivu liniju.

Izvođenjem jedn. 18) i 19) po ζ dobivamo nagib tangente u jednoj tački K_2-linije.

$$tg\ \varphi = \frac{1}{4f(1-\zeta)};$$

to je jednačina 15) dakle su tangente K_1- i K_2-linije u tačkama, koje odgovaraju istom argumentu ζ, međusobom paralelne. Pri tome moramo imati na umu, da za K_2-liniju ζ znači odnos

opterećene, za K_2-liniju pak odnos neopterećene dužine prema rasponu.

Paralelnost tangenata K_1- i K_2-linije sleduje neposredno iz njihovog statičkog značenja. Jer obe tangente imaju pravac otpora A, koji prouzrokuje koncentrovana sila P u rastojanju $z = \zeta l$ od desnog oslonca.

Paralelnim pomeranjem (translacijom) koord. sistema Axy (sl. 9d) do tačke D kao novog početka i okretanjem osâ za 180° dobivamo za K_2-liniju nove koordinate ξ, η, koje su sa starima x, y u odnosu

$$y = \frac{2fql}{3} - \xi, \text{ i } y = \frac{ql}{2} - \eta; \quad (22)$$

sa ovom transformacijom glasi jednačina 20)

$$\xi = 4f\eta\left[1 \mp \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\eta}{ql}}\right] \ldots \quad (20'')$$

a to je jednačina 11), koju smo za K_1-liniju (sl. 7d) dobili. Linije K_1 i K_2 su dakle identične i razlikuju se samo položajem, kao što smo iz postanka njihovih jednačina mogli predviđati.

Od trenutka, kada jednako razdeljen teret dužine l na nosač stupi, pa do trenutka, kad ga na drugom kraju napusti, opisuje krajna tačka vektora, koji prestavlja otpor levog oslonca A, zatvorenu krivu liniju AK_1DK_2A odnosno AK_2DK_1A, prema tome, dali se teret kreće u smeru BA ili AB. Desnom osloncu B odgovara simetrična polarna otporna linija.

Zatvorena linija AK_1DK_2A ima centralnu simetriju za središte O, koje polovi pravac AD. Dve tačke J_1 i J_2 na krajevima istog prečnika imaju paralelne tangente i isti parametar ζ. Samo prečniku AD odgovaraju dve vrednosti: $\zeta = 0$ (tangente AT i DT_1) i $\zeta = 1$ (tangente su ordinatna osa i njoj paralela kroz D). U pravcu AD poklapaju se dva prečnika jer su tačke A i D kao preseci linija K_1 i K_2 dvostruke.

Da zatvorena otporna linija mora u tački D (a prema tome i u tački A) imati dve tangente (DT_1 i vertikalu kroz D), dakle da je krivina u tački D diskontinualna, sleduje i iz upoređenja ordinata krivih K_1 i K_2 u neposrednoj blizini tačke D (sl. 9d).

Tačka D odgovara punom opterećenju raspona. Kad nad levim osloncem uklonimo beskonačno mali teret qdz, smanjuje se vertikalna komponenta otpora A za

$$dV_1 = -qdz\frac{z}{l} = -ql\zeta d\zeta;$$

kada pak isti teret uklonimo sa desnog oslonca, smanjuje se vertikalni otpor levog oslonca za

$$dV_2 = -qdz\frac{dz}{l} = -ql(d\zeta)^2;$$

u oba slučaja smanjuje se lučna sila za

$$dH = -qd\eta\frac{dz}{2} = -\frac{ql}{2}d\eta d\zeta$$

gde η znači ordinatu utecajne linije H.

Vertikala u rastojanju dH od ordinate tačke D seče linlje K_1 i K_2 u tačkama, kojih je diferencijà ordinatâ

$$dV_2 - dV_1 = ql\,d\zeta(\zeta - d\zeta) = ql\zeta d\zeta.$$

Diferenciji abscisa dH, koja je mala veličina drugog reda, odgovara po gornjem diferencija ordinatâ obih krivih K_1 i K_2, koja je mala veličina prvog reda, a to je analitičko obeležje da se obe krive u tački D seku bez tangiranja.

III. Jednako razdeljen teret stalne dužine.

Ako se jednako razdeljen teret q proteže na dužinu $z_1 - z_2$, koja je manja od raspona l, onda se može na nosaču kretati, a da se njegova veličina ne menja (sl. 10a). Sa $\frac{z_1}{l} = \zeta_1$ i $\frac{z_2}{l} = \zeta_2$ dobivamo vertikalnu komponentu otpora u osloncu A:

$$y = \frac{ql}{2}\left(\zeta_1^2 - \zeta_2^2\right)\cdots \quad 23)$$

a integracijom izraza 10) u granicama z_1 i z_2 dobivamo lučnu silu

$$x = \frac{2fql}{3}\left[3\left(\zeta_1^2 - \zeta_2^2\right) - 2\left(\zeta_1^3 - \zeta_2^3\right)\right]\cdots \quad 24)$$

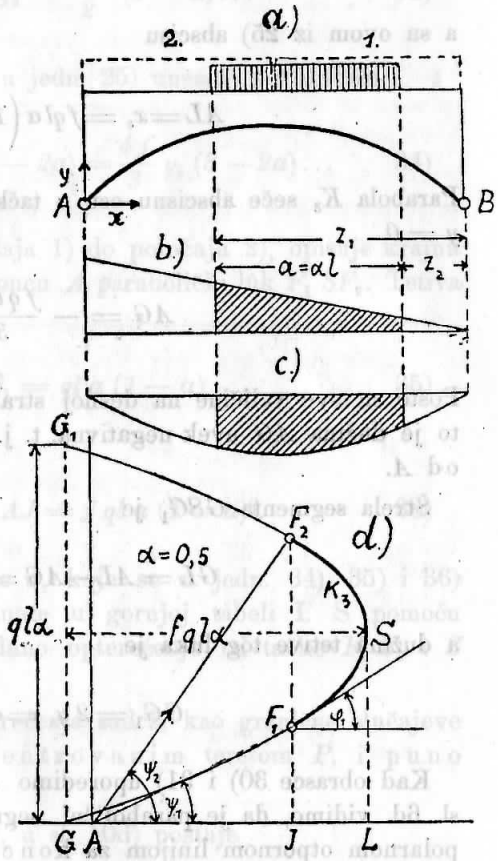
Kad uvedemo oznaku za stalnu dužinu $a = z_1 - z_2$, odnosno brojnu veličinu $\alpha = \frac{a}{l} = \zeta_1 - \zeta_2$, glase parametrične jednačine tražene linije:

$$y = \frac{ql\alpha}{2}(2\zeta_1 - \alpha)\cdots \quad (23')$$

$$x = \frac{2fql\alpha}{3}\left[3(2\zeta_1 - \alpha) - 2\left\{\alpha^2 - 3\zeta_1(\alpha - \zeta_1)\right\}\right] \quad (24')$$

u kojima je sada ζ_1 promenljivi parametar. Eliminacijom ovoga dobivamo polarne otporne linije (kraće K_3-linije)

$$x = 4f\left(1 - \frac{y}{ql\alpha}\right)y - \frac{fql\alpha^3}{3};\cdots \quad (25)$$



Slika 10.

Polarna otporna linija je u ovom slučaju dakle parabola sa horizontalnom osom i parametrom $\frac{ql\alpha}{4f}$. Iz sastava obrasca 25) zaključujemo, da ovo važi za svaku vrstu opterećenja dok god se ukupna veličina tereta pri njegovom kretanju ne menja. Raspored tereta ima utecaj na parametar (oblik) parabole i položaj njenog temena. Nagib tangente u jednoj tački parabole je određen sa

$$tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{ql\alpha}{4f(ql\alpha - 2y)} \ldots \quad (26)$$

Ordinatu parabolina temena S (sl. 10d) dobivamo iz obr. 26) sa $tg\,\varphi = \infty$

$$LS = y_s = \frac{ql\alpha}{2} \ldots \quad (27)$$

a sa ovom iz 25) abscisu

$$AL = x_s = fql\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \ldots \quad (28)$$

Parabola K_3 seče abscisnu osu u tački G; iz jedn. 25) sleduje sa $y = 0$

$$AG = -\frac{fql\alpha^3}{3}, \ldots \quad (29)$$

Pošto su sve veličine na desnoj strani jedn. 29) bitno pozitivne, to je dužina AG uvek negativna, t. j. tačka G leži uvek levo od A.

Strela segmenta GSG_1 je

$$GL = AL - AG = fql\alpha \ldots \quad (30)$$

a dužina tetive tog luka je

$$GG_1 = 2y_s = ql\alpha \ldots \quad (31)$$

Kad obrasce 30) i 31) uporedimo sa vrednostima upisanim na sl. 6d. vidimo, da je parabolični segmenat GSG_1 kongruentan sa polarnom otpornom linijom za koncentrovani teret $P = ql\alpha$, i da se od ove samo u tome razlikuje, što je za dužinu AG ne levo pomeren.

Od paraboličkog lûka GSG_1 važi kao polarna otporna linija za opterećenje $ql\alpha$ samo onaj deo F_1SF_2, koji odgovara kretanju tereta između oba granična položaja 1) i 2) (sl. 10a). Obim položajima odgovara ista lučna sila $H = AJ$, tačke F_1 i F_2 leže dakle

u istoj vertikali. Njihove ordinate t. j. vertikalne komponente otpora u osloncu A, koje prouzrokuje teret $ql\alpha$ u položajima 1) i 2), nalazimo neposredno iz jednačine momenata za tačku B:

$$JF_1 = y_1 = \frac{ql\alpha^2}{2} \ldots \quad 32)$$

$$JF_2 = y_2 = \frac{ql\alpha}{2}(2 - \alpha) \ldots \quad 33)$$

Obe vrednosti y_1 i y_2 daju u jedn. 25) unesene za abscisu

$$AJ = \frac{2fql}{3}\alpha^2(3 - 2\alpha) = \frac{4f}{3}y_1(3 - 2\alpha) \ldots \quad 34)$$

Dok se $ql\alpha$ kreće iz položaja 1) do položaja 2), opisuje krajna tačka otpornog vektora u osloncu A parabolički lûk F_1SF_2. Tetiva tog lûka ima dužinu

$$F_1F_2 = y_2 - y_1 = ql\alpha(1 - \alpha) \ldots \quad 35)$$

a strelu

$$JL = AL - AJ = fql\alpha(1 - \alpha)^2. \quad 36)$$

Tri funkcije brojne veličine α, koje se u jedn. 34), 35) i 36) pojavljuju, nalaze se izračunate u gornjoj tabeli I. S pomoću tabele nalazimo brzo za zadano opterećenje tri tačke F_1 F_2 i S parabole K_3.

Ovde smatrani slučaj opterećenja sadrži kao granične slučajeve opterećenje jednim koncentrovanim teretom P, i puno razdeljeno opterećenje.

U prvom slučaju je $\alpha = 0$, u sl. 10d) postaje

$$AG = 0, \quad AJ = 0, \quad y_1 = 0 \quad y_2 = ql\alpha = P.$$

Tačka F_1 pada u početak A, polarna otporna linija prestavljena je za ovaj slučaj na sl. 6d).

U drugom slučaju je $\alpha = 1$, po jedn. 32) i 33) je

$$y_1 = y_2 = y_3 = \frac{ql}{2}$$

a po jedn. 28) i 34)

$$AL = AJ = \frac{2fql}{3} = qF$$

ako sa F označimo površinu utecajne figure H (sl. 10c).

Obe tačke F_1 i F_2 padaju prema tome u teme S. Linija K_3 redukovana je na jedinu tačku S, vektor AS prestavlja otpor oslonca A usled punog jednako razdeljenog tereta,

U tabeli II nalaze se sve, na sl. 10d) označene dužine, zatim nagibi $tg\,\psi_1$ i $tg\,\psi_2$ otpora u graničnim položajima tereta i nagib $tg\,\varphi_1$ paraboline tangente u tački F_1.

Tabela II.

α	AG	AJ	JL	y_1	y_2	F_1F_2	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$	$tg\,\varphi_1$
0	0	0	48	0	8	8	$\frac{1}{4}$	∞	$\frac{1}{4}$
0,25	1	20	27	1	7	6	$\frac{3}{10}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{1}{3}$
0,50	4	32	12	2	6	4	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$
0,75	9	36	3	3	5	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	1
1,00	16	32	0	4	4	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	∞
puta	$\frac{f\,ql\,\alpha}{48}$			$\frac{ql\,\alpha}{8}$			$\frac{1}{f}$		

Dok još nije cela dužina a tereta stupila na nosač, dotle je α promenljiva veličina. Kad teret sa desnog oslona nastupa, identično je α sa pređe ζ označenom veličinom. Između tačaka A i F_1 je polarna otporna linija identična sa K_1-linijom, za koju smo izveli jednačinu 11). Pošto tačka F_1 pripada i K_1-liniji, to su njene koordinate obr. 32) i 34) identične sa koordinatama br. 9') i 10') kad α sa ζ zamenimo.

K_1-liniju možemo definisati kao geometrijsko mesto tačaka F_1 svih parabola K_3 sa parametrom $\frac{ql\,\alpha}{4f}$, kad se α kontinualno manja od 0 do 1.

Nagib paraboline tangente u tački F_1 sleduje iz jedn. 26 sa $y_1 = \frac{ql\,\alpha^2}{2}$:

$$tg\,\varphi_1 = \frac{1}{4f(1-\alpha)}. \qquad (37)$$

Ovaj izraz identičan je sa obr. 15); krive K_1 i K_3 imaju dakle u tački F_1 zajedničku tangentu.

Kad u jedn. 25) smatramo α kao promenljivu veličinu, prestavlja nam ona jedan sistem parabola jednostruke raznovrsnosti. Krivu K_1-liniju možemo definisati i kao envelopu toga sistema. Kad jednačinu parabole

$$x = 4f\left[1 - \frac{y}{ql\,\alpha}\right]y - \frac{f\,ql\,\alpha^3}{3} \qquad (25)$$

diferenciramo po parametru sistema α, dobivamo

$$0 = \frac{4fy^2}{ql\,\alpha^2} - f\,ql\,\alpha^2; \qquad (38)$$

iz obih jednačina sleduje eliminacijom parametra jednačina 11) K_1-linije.

Kad teret $ql\,\alpha$ sa levog oslonca nastupa u položaj 2) (sl. 10a) onda je polarna otporna linija identična sa K_2-linijom (sl. 11), koja je jednačinom 22) definisana bila.

Parabolina tačka F_2 pripada i K_2-liniji. Obrasci 33) i 34) koordinatâ tačke F_2 postaju identični sa obr. 20) i 21) koordinatâ jedne tačke K_2-linije, kada α zamenimo sa $(1-\zeta)$.

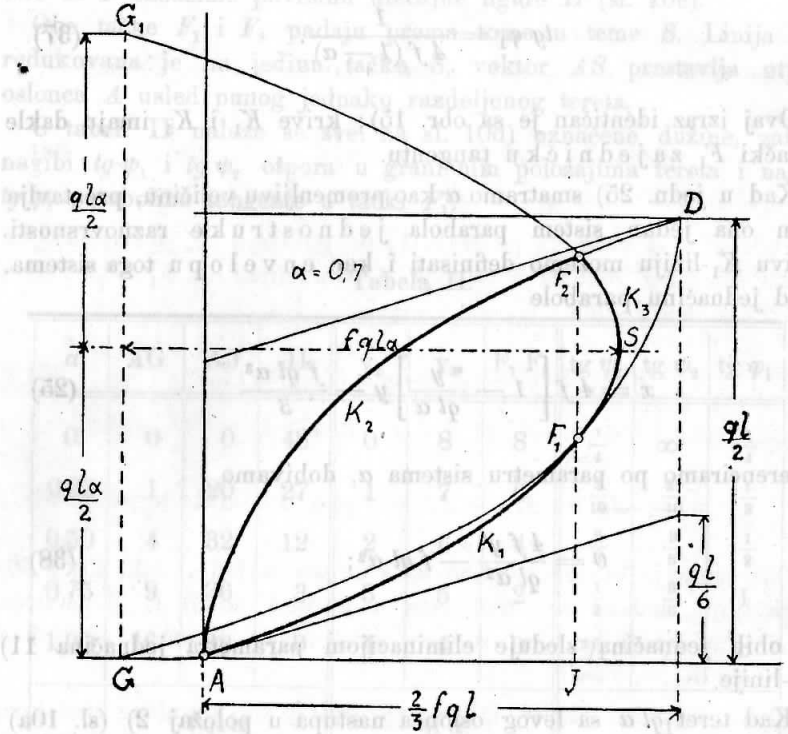
Parabola K_3 i K_2-linija seku se u tački F_2. Nagib tangente na K_2 dobivamo iz obr. 15) sa $\zeta = (1-\alpha)$:

$$tg\,\varphi_2 = \frac{1}{4f\alpha} \cdots \qquad (15a)$$

a nagib paraboline tangente u tački F_2 sleduje iz opšteg obr. 26), kad u njega stavimo za y vrednost y_2 iz obr. 33)

$$tg\,\varphi'_2 = -\frac{1}{4f(1-\alpha)} \qquad (26a)$$

ne može dakle ni u kom slučaju biti $\varphi_2 = \varphi'_2$.



Slika 11.

Time smo opisali zatvorenu, iz delova K_1 K_2 i K_3 složenu liniju AF_1SF_2A, koju krajna tačka otpornog vektora A opisuje, kad jednako razdeljeni teret dužine $a < l$ preko nosača prelazi.

Otpor desnog oslonca B opisuje pri tome ovoj s i m e t r i č n u zatvorenu liniju. Kad se teret kreće u smeru AB, opisuju oba otporna vektora svoju putanju u smislu kazaljke na satu; sa smerom kretanja tereta menja se dakako i smisao okretanja krajnih tačaka otpornih vektora.

IV. Teret se sastoji iz niza jednakih koncentrovanih sila u jednakom rastojanju.

1. Broj tereta je konstantan.

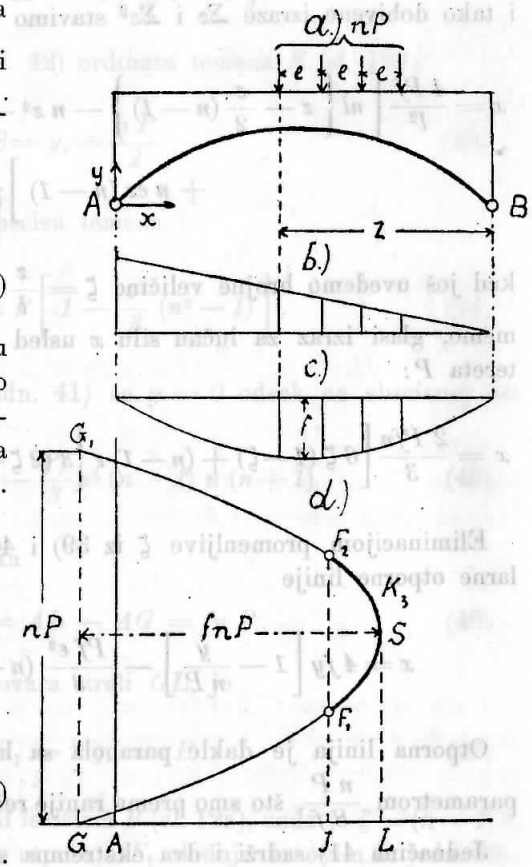
Neka je n broj jednakih tereta P, e njihovo međusobno rastojanje, z rastojanje prvog tereta od desnog oslonca (sl. 12a); kad još označimo odnose dužina sa $\zeta = \frac{z}{l}$ i $\varepsilon = \frac{e}{l}$, glasi obrazac za vertikalnu komponentu otpora A

$$y = nP\left[\zeta - (n-1)\frac{\varepsilon}{2}\right] \qquad (39)$$

Lučnu silu ili horizontalnu komponentu otpora dobivamo kao proizvod sile P sa zbirom ekvidistantnih ordinata utecajne figure H (sl. 12c). Dakle je

$$x = \frac{4Pf}{l^2}\sum_{z_1}^{z_n} z(l-z) = \frac{4Pf}{l^2}\left[l\sum_{z_1}^{z_n} z - \sum_{z_1}^{z_n} z^2\right] \qquad (a)$$

sa $z_1 = z$, $z_2 = z - e, \ldots$
$z_n = z - (n-1)\,e$.



Slika 12.

Dalje je $\sum_{z_1}^{z_n} z = nz - e\sum_{1}^{n-1} i$; gde i znači ceo broj, b)

$$\sum_{z_1}^{z_n} z^2 = nz^2 + e^2\sum_{1}^{n-1} i^2 - 2ez\sum_{1}^{n-1} i, \ldots \qquad c)$$

Kad u obrasce b) i c) uvedemo

$$\sum_{1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ i } \sum_{1}^{n-1} i^2 = \frac{n}{6}(2n-1)(n-1)$$

i tako dobivene izraze Σz i Σz^2 stavimo u jednačinu a), rezultuje

$$x = \frac{4Pf}{l^2}\left[nl\left\{ z - \frac{e}{2}(n-1)\right\} - nz^2 - \frac{ne^2}{6}(2n-1)(n-1) + \right.$$
$$\left. + nez(n-1)\right];$$

kad još uvedemo brojne veličine $\zeta = \frac{z}{l}$ i $\varepsilon = \frac{e}{l}$ i članove sažmemo, glasi izraz za lučnu silu x usled n jednakih ekvidistantna tereta P:

$$x = \frac{2Pfn}{3}\left[6\zeta(1-\zeta) + (n-1)\varepsilon\left\{ 3(2\zeta-1) - \varepsilon(2n-1)\right\}\right] \quad (40)$$

Eliminacijom promenljive ζ iz 39) i 40) sleduje jednačina polarne otporne linije

$$x = 4fy\left[1 - \frac{y}{nP}\right] - \frac{Pf\varepsilon^2}{3}(n-1)n(n+1); \quad 41)$$

Otporna linija je dakle parabola sa horizontalnom osom i sa parametrom $\frac{nP}{8f}$, što smo prema ranije rečenome unapred očekivali.

Jednačina 41) sadrži i dva ekstremna slučaja opterećenja, koje smo već razmotrili.

Za $n = 1$ prelazi jedn. 41) u jednačinu parabole 3) koju smo za jedan koncentrovani teret izveli.

Kada pak n konverguje prema ∞ i istodobno ε prema nuli, prelazi niz koncentrovanih tereta u jednako razdeljen teret, tako da je $nP = ql\alpha$. Kada u 41) smenimo nP sa $ql\alpha$ i pišemo

$$(n-1)\varepsilon = (n+1)\varepsilon = \alpha$$

što je zbog $n = \infty$ slobodno, dobivamo ranije izvedeni obrazac 25) za K_3-parabolu.

Izvod jednačine 41) po x daje nagib tangente paraboline

$$tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{nP}{4f(nP-2y)}. \quad (42)$$

Sa $tg\,\varphi = \infty$, daje obr. 42) ordinatu temena S (sl. 12d).

$$LS = y_s = \frac{nP}{2} \quad (43)$$

a sa y_s iz 41) sleduje abscisa temena

$$AL = x_s = fnP\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{3}(n^2-1)\right]. \quad (44)$$

Dalje dobivamo iz jedn. 41) sa $y = 0$ odsek na abscisnoj osi

$$AG = -\frac{Pf}{3}\varepsilon^2(n-1)n(n+1) \quad (45)$$

i strelu paraboličnog lûka

$$GL = AL - AG = fnP. \quad (46)$$

Tetiva luka, koja odgovara streli GL, je

$$GG_1 = 2y_s = nP. \quad (47)$$

Kada n-ti teret stoji nad ležištem B (sl. 12a), onda je $\zeta = (n-1)\varepsilon$, a vertikalna komponenta otpora AF_1 sleduje sa ovim iz jedn. 39):

$$y_1 = JF_1 = \frac{n(n-1)\varepsilon P}{2}. \quad (48)$$

Kada pak prvi teret stoji nad ležištem A, onda je $\zeta = 1$, otpor oslonca A je ravan AF_2, a njegova vertikalna komponenta je

$$y_2 = JF_2 = \frac{nP}{2}[2 - (n-1)\varepsilon]. \quad (49)$$

Oba položaja su simetrična prema sredini raspona, stoga je horizontalna komponenta otpora u oba slučaja ista:

$$x_1 = x_2 = AJ = \frac{2 f P \varepsilon}{3} n (n-1) [3 - (2n-1)\varepsilon]. \quad 50)$$

Dokle se broj n tereta na nosaču ne menja usled njegova kretanja, prestavlja parabolički lûk $F_1 S F_2$ polarnu otpornu liniju. Tetiva toga lûka je

$$y_2 - y_1 = F_1 F_2 = n P [1 - \varepsilon (n-1)], \quad 51)$$

a strela je

$$JL = AL - AJ = n Pf [1 - \varepsilon (n-1)]^2. \quad 52)$$

Substitucijom $nP = ql\alpha$ i $(n-1)\varepsilon = (n+1)\varepsilon = \alpha$ preobražuju se jednačine 43) do 52) u jednačine 27) do 36), koje smo za jednako razdeljeni teret dužine $l\alpha$ ranije izveli.

2. Broj tereta je promenljiv.

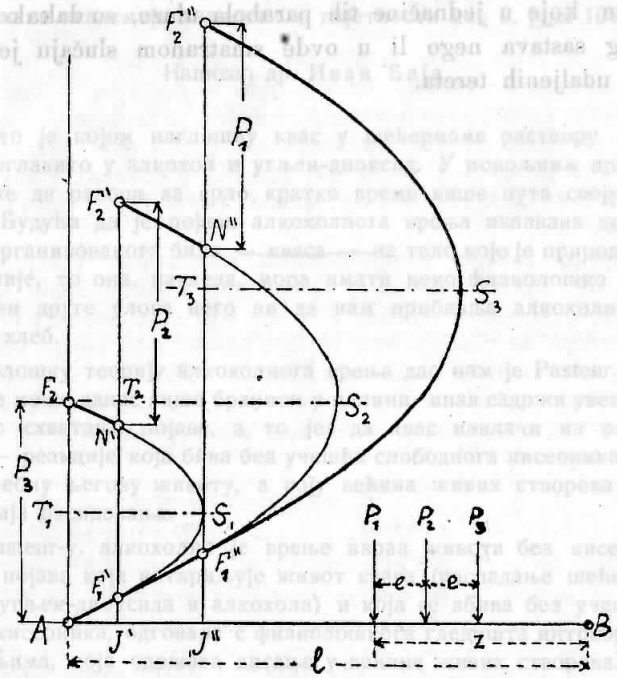
Kada niz tereta P nastupa na nosač sa desna, raste broj tereta od 1 do n. Svakom broju odgovara po obr. 41) jedna parabola, polarna otporna linija sastoji se dakle iz n paraboličkih odseka; dva i dva susedna odseka seku se u tačkama F_1.

Slika 13) prestavlja polarnu otpornu liniju levog oslonca za tri tereta $P_1 = P_2 = P_3$ i $\varepsilon = 0{,}1$. Dok je $z < e$, važi odsek AF_1' parabole S_1 kao otporna linija, za $e < z < 2e$ važi odsek $F_1' F_1''$ parabole S_2 i naposletku za $2e < z < l$ odsek $F_1'' S_3 F_2''$ parabole S_3.

Dokle prvi teret prelazi put od B do A opisuje krajna tačka otpornog vektora A kontinualnu liniju $AF_1' F_1'' S_3 F_2''$. Čim prvi teret napusti levo ležište, smanjuje se vertikalna komponenta y otpora momentano za konačnu veličinu P_1 a lučna sila x za beskonačno malu veličinu. Rezultantni otpor A menja se na-

prasno od AF_2'' na AN'' tako da je $F_2'' N'' = P_1$. U daljem odstupanju niza na levo, dok je $l + e > z > l$, opisuje kraj otpornog vektora odsek $N'' F_2'$ parabole S_2, i za $z = l + e$, t. j. u momentu kada P_2 napušta ležište A, učini skok $F_2' N' = P_2$. Od N' kreće se po odseku $N' F_2$ parabole S_1 dogod je $l + 2e > z > l + e$, i u momentu kada poslednji teret P_3 napusti nosač, pada sa F_2 u A.

Za jedan niz od n tereta, koji sa nosača na levo odstupa, sastoji se polarna otporna linija levog ležišta iz $(n-1)$ paraboličkih odseka, koji su vertikalnim stepenima rastavljeni. Visina stepena je ravna veličini tereta P.



Slika 3.

Tačke $A F_1' F_1'' F_1''' \ldots$ leže na jednoj krivoj liniji; jednačinu ove dobivamo eliminacijom broja n iz jedn. 48) i 50) za koordinate tačaka F_1:

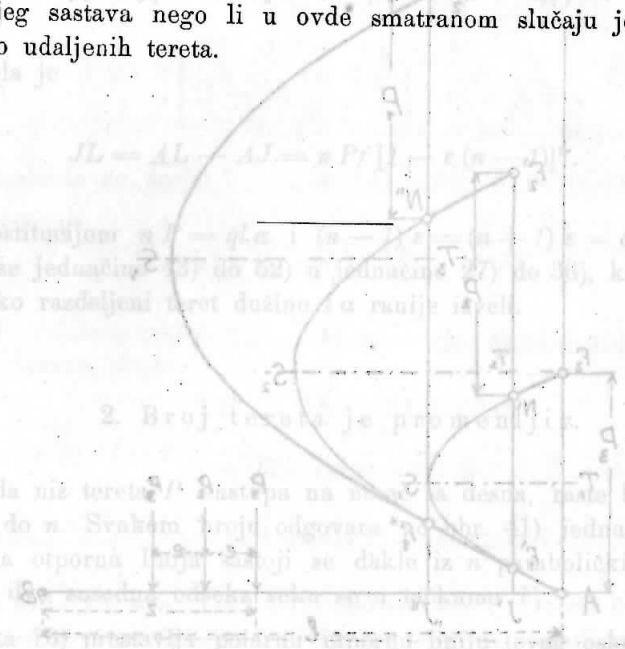
$$x = 4 fy \left[1 \mp \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8\varepsilon}{P} y + \varepsilon^2} \right]. \quad (53)$$

ili u racijonalnom obliku

$$128\,\frac{\varepsilon f^2}{P}\,y^3 - (144 - 16\,\varepsilon^2)\,f^2\,y^2 + 72\,f\,xy - 9\,x^2 = 0. \quad (53')$$

Sa $P = ql\,\varepsilon$ i $\varepsilon = 0$ prelazi jedn. 53) u jedn. 11), koju smo u odeljku II 1. našli za polarnu otpornu liniju K_1 usled jednako razdeljenog tereta.

Jasno je, da se i u opštijem slučaju kada se niz sastoji iz teretâ nejednake veličine i nejednakih rastojanja, polarna otporna linija sastoji iz paraboličnih odseka sa horizontalnim osama. Konstante, koje u jednačine tih parabola ulaze, su dakako komplikovanijeg sastava nego li u ovde smatranom slučaju jednakih i jednako udaljenih tereta.



Основна биолошка енергија и енергетика кваса.

Примљено у сједници разреда математичко-природословнога Југославенске академије знаности и умјетности дне 3. јуна 1919.

Написао др. Иван Ђаја.

Познато је којом наглошћу квас у шећерноме раствору претвара шећер поглавито у алкохол и угљен-диоксид. У повољним приликама, квас може да разори, за врло кратко време више пута своју тежину шећера. Будући да је појава алкохолнога врења изазвана деловањем једнога организованога бића — кваса — на тело које је природна храна сваке ћелије, то она, изгледа, мора имати неко физиолошко значење, испуњујући друге улоге него ли да нам прибавља алкохолна пића и ускисива хлеб.

Физиолошку теорију алкохолнога врења дао нам је Pasteur. Премда се она не може данас више бранити у целини, ипак садржи увек основно биолошко схватање појаве, а то је: да квас извлачи из распадања шећера — реакције која бива без учешћа слободнога кисеоника — енергију потребну његову животу, а коју већина живих створова извлачи из реакција оксидовања.

По Pasteur-у, алкохолно је врење израз живота без кисеоника, а хемијска појава која наткриљује живот кваса (распадање шећера, производња угљен-диоксида и алкохола) и која се збива без учешћа слободнога кисеоника, одговара с физиолошкога гледишта интраорганским сагоревањима, која одржава дисање у већине живих створова. У томе смислу, т. ј. да су реакције оксидовања замењене у кваса реакцијама које се збивају без сарадње кисеоника, можемо још увек сматрати појаву алкохолнога врења последицом живота без кисеоника. Али Pasteur мишљаше да је то особено функционисање квасног организма у вези с одсутношћу кисеоника, т. ј. да одсутност тога гаса у средини у којој се квас налази, приморава овога да извлачи из распадања шећера енергију коју остали створови добивају из његова сагоревања.

Данас знамо да је у томе смислу узрочности нетачно говорити о животу без кисеоника, јер и у присуству кисеоника квас ипак раставља шећер производећи алкохол и угљен-диоксид. У крајњем случају, одсутност

кисеоника могла би се сматрати чиниоцем на који би квас био прилагодио свој живот у току свога филогенетског развитка.

Најзад, Pasteur сматраше алкохолно врење појавом присно везаном за живот квасца, т. ј. „виталном појавом“. Од како је Buchner открио ферменат зимазу, и претпостављајући да је доказано — а то није случај — да целокупна моћ превирања жива квасца припада томе ферменту или скупу фермената, алкохолно врење би се сводило на ферментску делатност. Али у дубљему смислу, појава алкохолнога врења ипак је најприсније везана за живот, па ма то било посредовањем фермената, јер њоме хемијски потенцијал прелази у енергетску службу живота.

Према томе може се још увек сматрати алкохолно врење као израз живота без кисеоника једнога организма, који, у одсутности, као и у присутности кисеоника, извлачи енергију потребну његову функционисању из реакција које нису оксидовања.

У томе физиолошкоме схватању алкохолнога врења, морамо се запитати: колика мора бити енергетска потреба квасца, да он разорава шећер познатом жестином? Треба најпре напоменути да квас ослобађа само мали део хемијскога потенцијала молекула шећера, јер највећи део остаје у алкохолу, произведеном врењем. Док 1 грам гликозе развија потпуним сагоревањем у CO_2 и H_2O 3,76 кал. (Berthelot), у алкохолноме врењу даје само 0,133 кал. (Rubner); дакле само око 3,5% свога хемијскога потенцијала.

Поред тако слабога искоришћавања, квас ставља у игру количине енергије које далеко надмашују енергетске потребе виших животиња. Rubner[1]) је израчунао количину енергије коју квас ставља у игру у присуству шећера на температури од 38°, изван сваке појаве множења, и нашао је, за количину квасца која садржи 30 гр. азота (ова количина азота одговара отприлике 1 кгр. живе материје виших животиња), следећу вредност, коју стављамо на крај низа бројева који се односе на неколико сисара:[2])

	тежина	потрошња енергије на кгр (= 30 гр. N) на 24 ч. на 15°
коњ	350 кгр.	11,1
човек	70 „	30
пас	20 „	45,9
пас	10 „	65,2
одојче	4 „	80,6
пас	3 „	88,1
миш	0,020 „	210
миш (новорођен)	0,001 „	654
квас на 38°		1743,3

Види се из горњега прегледа да је потрошња енергије квасца 157 пута већа него ли у коња, а 58 пута већа него ли у човека. Да би поређење

[1]) Max Rubner, Ernährungsphysiologie der Hefezelle bei alkoholischer Gährung. Leipzig 1913. стр. 46.

[2]) ibid. стр. 258.

било тачније, требало би одбити од потрошње хомеотерма произведену топлоту у јединоме циљу одржавања сталне температуре. По Lefèvre-у[3]) та топлота термогенезе представља једну трећину целокупне енергије издржавања човечјега организма: према томе, укинувши је, добивамо за човека вредност 20 наместо горњега броја, а, према томе, квасова потрошња била би 87 пута већа од човекове.

Та огромна количина енергије, коју квас ставља у промет, служи, према данашњему схватању, на задовољавање његових енергетских потреба; и то, енергетских потреба једнога створа, изван појаве растења и множења, изван сваке производње спољашњега рада, покрета, и изван сваке потребе калорификовања! Та чињеница подстиче нас да тражимо и у виших створова такву категорију енергије, тим пре што се обично нагиње схватању да су њихове енергетске потребе само извор мишичнога рада и топлоте. Покушајмо дакле да аналишемо енергетски оброк једнога хомеотерма.

Кад човек или животиња не производи никакав спољашњи рад, све енергетске појаве које се збивају у њима крећу се између два облика енергије: хемијске потенцијалне енергије и топлоте. Међутим, енергија је без сумње разним путовима доспела из првога облика у други, задовољивши својим трансформацијама разне нергетске потребе створа; тако, да поред анализе хемијскога метаболизма, требало би имати и анализу енергетскога промета.

У томе последњему циљу, требало би моћи пратити енергетски оброк у свим његовим променама које претрпљује у организму у вези с физиолошким улогама које одиграва. Али, за сада бар, није могућно пратити сустопице ток енергије живога створа. Уопште, само су нам крајњи чланови трансформација енергије познати. На пример, не знамо шта се збива у енергетскоме погледу између чланова: хемијска енергија — мишични рад; а исти је случај за готово све трансформације енергије, које се збивају у живоме механизму. Стога се морамо задовољити за сада једном чисто физиолошком анализом енергетскога оброка, т. ј. његовом поделом међу разна физиолошка функционисања, без познавања низа његових трансформација.

С те тачке гледишта намеће се одмах следећа подела: треба разликовати енергију неопходно потребну животноме механизму од енергије које се жив створ може лишити, када су извесне погодбе остварене. Замислимо једнога хомеотерма, непокретна, у средини чија је температура доста висока те да он није приморан производити топлоту у јединоме циљу одржавања своје сталне температуре, т. ј. топлоту ради топлоте; уз то ако гладује (у физиолошком смислу: неузимање никакве хране) те је тиме искључена активност апарата за варење, која је у вези с присутношћу хране, тада ће потрошња енергије тога створа представљати минимум енергије потребне у сваком тренутку одржавању механизма живота. Ту неопходну енергију морамо аналисати, да бисмо нашли у њој онај део који одговара енергији коју троши квасна ћелија у додиру са шећером.

[3]) J. Lefèvre, Chaleur animale et bioénergétique. Paris 1911. стр. 909.

Ако се запитамо, на шта служи та неопходно потребна енергија, тај минимум физиолошке енергије, помишљамо, наравски, најпре на унутрашњи мишићни рад: рад срца, диафрагма, међуребарних мишића и разних глатких мишића. Тај се мишићни рад обично ставља у први ред у дефиницијама минимума енергије потребне животу.

По Lefèvre-у[1]), физиолошка енергија (т. ј. минимум енергије како смо га дефинисали) у односу је с активношћу органа . . . . и употребљена је у облику потенцијала на одржавање животнога механизма и активности ткива. Мало даље (стр. 907.) обавештени смо о томе, шта треба подразумевати под животним механизмом и активношћу ткива: „то је неопходно потребни рад срца и мишића нутритивнога живота, хемијски тонус пругастих мишића у одмору. Те разне активности представљају ону физиолошку енергију."

Magnus Levy[2]) дефинише овако енергију утрошену при одмору и гладовању (Grundumsatz): „То је најмања вредност измена, бројни израз употребе енергије потребне испуњавању свих трајних функција, т. ј. оних које су потребне одржавању живота. Ту припадају, између осталога, видљиви покрети активности дисања и срца, променљива активност глатких мишића, течна струјања (лучења) која не зависе или која само делимично зависе од пропулсивне снаге срца, појаве у односу с изменама и трошењем протоплазме и т. д."

О томе истоме предмету A. Loewy[3]) разумева под „изменама издржавања" (Erhaltungsumsatz) „измене потребне одржавању сталних функција важних по живот", не дајући ближа обавештења о природи тих функција.

По Kellner-у[4]), динамичка је енергија „део који служи непосредно животним функцијама ћелије" . . . „Извесне активности организма, функционисање жлезда, покрети дисања и срца, за које је везана потрошња хране, не могу се смањити доношењем топлоте из средине . . ." (стр. 100.).

У анализи минимума енергије потребне животноме организму требало би пре свега издвојити и ставити у први ред онај део који је основан, а то је: енергија која не служи никаквоме осетљивоме механичкоме раду, која не издржава никакав физиолошки механизам особен овој или оној ћелији, већ која је присутна гдегод је живота; то је она енергија која је неопходно потребна мишићу који се не згрчава, жлезди која не лучи, која је уопште потребна свакој ћелији изван свакога деловања њој особена. Та је енергија у основи свакога животнога функционисања, она представља, тако рећи, живот ослобођен својих атрибута; стога је она заједничка свима створовима, па ипак, као што ћемо доцније видети, можда је она једина заједничка категорија енергије. Та енергија, која

[1]) op. cit. стр. 906.

[2]) Magnus Levy, у Carla Noordena, Handbuch der Pathologie des Stoffwechsels, Berlin 1906. (II. издање) стр. 209.

[3]) A. Loewy, u Opperheimerovu Handbuch der Biochemie des Menschen und der Tiere. Jena 1911., (1) 172.

[4]) Kellner, Die Ernährung der landwirtschaftlichen Nutztiere. Berlin 1916 (VII. изд.).

се може назвати основна биолошка енергија, јесте на највећем физиолошком достојанству међу свима категоријама енергије, јер се само на основу ње све друге могу манифестовати.

Ако се тој енергији не даје место које јој припада у енергетскоме оброку виших створова, то је стога што јој не можемо приписати какву очевидну улогу, као што се то може учинити, на пример, за енергију која служи на контракцију мишића. Али управо стога што је она у основи најдубљих и најприснијих енергетских појава живота, па према томе и најнеприступачнија, нисмо кадри приписати јој какву одређену улогу. Улога енергије коју мишић уротребљује на производњу рада јасна је, док енергија коју троши при одмору изван тонуса, изгледа да не служи ни на шта. Међутим, захваљујући само овој последњој, мишић је подобан да одговори на један надражај и да стави у игру енергију коју ће претворити у механичан рад.

Све су то појмови уобичајени свакоме физиологу: и у толико је чудноватије да готово ни у једној анализи енергетскога промета нису јасно изражени, већ се обично, кад је реч о енергији неопходно потребној животу, говори само о мишићноме раду срца и апарата за дисање. Нарочито у виших створова, у којих је енергија употребљена у многим очевидним улогама, губи се из вида енергија која служи одржавању основнога живота његових ћелија: јер у једноћелијскога створа који не производи никакав видљив рад, та енергија, која представља вероватно његову једину енергетску потребу, не може остати непримећена. Отуда факат да се у анализи енергетскога оброка виших створова једва наилази на део који одговара енергетским потребама квасне ћелије.

У најмањему енергетскоме оброку потребну организму за његово издржавање кад не производи никакав спољашњи рад и кад температура средине искључује сваку потребу посебног калорификовања, т. ј. у чисто физиолошкој енергији (Lefèvre), од преке је потребе разликовати део који служи на производњу разних мишићних покрета и на издржавање специјалних органских функција, од те основне биолошке енергије како смо је горе дефинисали. То се разликовање намеће с физиолошкога као год и с енергетскога гледишта; с енергетскога гледишта то је чак вероватно најдубља разлика која се може наћи између разних делова енергетскога оброка. Јер заиста, између мишићнога рада који се ставља на рачун чисте физиолошке енергије и рада вољних мишића, не постоји никаква разлика енергетскога реда, будући да рад срчанога мишића почива, без сумње, на истим енергетским трансформацијама као и рад ма којега вољног мишића. Подела у те две врсте мишићнога рада јесте дакле чисто физиолошка: рад извесних мишића неопходно је потребан одржавању живота, док рад других није. Али између основне биолошке енергије и другога дела чисто физиолошке енергије, који служи унутрашњему мишићноме раду, постоји не само једна физиолошка разлика, него, без сумње, и разлика енергетскога реда; јер замишљамо енергетску игру која одржава живот једнога мишића при одмору, различном од оне којом се мишић контрактује производећи механичан рад.

Како можемо себи представити улогу основне биолошке енергије? „Морамо се најпре ослободити схватања“, вели Abderhalden, „да се производња рада састоји само у видљивим покретима. У ћелији се збивају многобројне појаве у вези с трошњом енергије, а у које не можемо за сада продрети. Сигурно је да нам све трансформације енергије у ћелијама нису познате . . .“ Опште је схватање, да кроз живу материју, изван сваке видљиве динамичке појаве, тим самим што живи, непрекидно протиче један ток енергије. Тај ток енергије, у односу с материјалним променама из којих постаје, мора бити карактеристични елеменат живота.

Не знамо ништа о трансформацијама основне биолошке енергије; али је изван сумње да она не прелази непосредно из хемијскога облика у топлотни облик, премда су то једини чланови за које знамо. Између тих крајњих чланова морају постојати енергетске трансформације, које сачињавају основни механизам живота.

Врло је вероватно да је свака ћелија седиште разним видљивим динамичким појавама, као што су протоплазматска струјања, пулсатилне вакуоле, а да не узмемо у обзир кариокинезу у ћелијâ при деоби. Ако представљамо себи основну биолошку енергију као извор тих појава, не треба замишљати да су тиме њене улоге исцрпене. Морамо је замислити нарочито заузету одржавањем каквога ситнијега кретања, нечега сличнога треперењу сваке честице живе материје. Морамо бити прожети појмом да је хемијска енергија потребна животу и за нешто што није видљив механичан рад, али је погодба за производњу овога.

Такође је несумњиво да би нетачно било сматрати основну биолошку енергију последицом трошења протоплазме, јер то би значило порицати сваку стварну потребу енергије за ћелију која не производи механични рад. Уосталом видећемо да основна биолошка енергија може да води порекло, већим делом бар, из безазотних тела; а сагоревање угљених хидрата или масти без одговарајуће потрошње азотних тела, не може се сматрати трошењем протоплазме.

Основна је биолошка енергија дакле један део енергије потребне одржавању живота, т. ј. праве физиолошке енергије. Ову је последњу лако одредити; по Lefèvre-у[1]), она износи 1490 кал. на 24 часа, за одрасла човека од 65 кгр. Сасвим је друга ствар задатак који има да одреди вредност основне биолошке енергије; он је скопчан с великим тешкоћама, јер би требало моћи одбити од физиолошке енергије све што не припада основној биолошкој енергији. Међутим, само су нам вредности срчанога рада и рада мишића дисања отприлике познате, међу делањима мишића вегетативнога живота. Уз то би требало знати коју количину енергије троши тонус пругастих мишића и глатких мишића крвних судова и утробе. Затим, сва физиолошка енергија која не припада основној биолошкој енергији не састоји се само у мишићном раду и тонусу. Тако, на пример, један део физиолошке енергије мора бити представљен хемијским потенцијалом ослобођеним у току трансформација резерва и готово сваке промене хране, која претходи њеној непосредној

[1]) op. cit. стр. 909.

употреби у ћелији. Тој енергији трансформацијâ припада она енергија ослобођена у току употребе хране у организму, коју је Rubner назвао „специфичном динамичном енергијом“ разних алимената, затим енергија ослобођена у ферментским реакцијама и др.

Један део физиолошке енергије мора такође служити особеној активности разних органа, која се не састоји у мишићноме раду. На пример, бубрег који лучи троши више енергије од жива бубрега који не лучи (Tangl); а мора бити исти случај за рад сваке жлезде. Што се тиче плућа, ако се гасовите измене врше у њима и против закона дифузије, као што Bohr мисли да је доказао, тада би плућна мембрана производила рад као и бубрег, а хематоза би изискивала да плућна мембрана троши и у том циљу извесну количину енергије. Та функциона енергија органа без сумње је део физиолошке енергије који је најтеже одредити, са разлога практичнога као и теоријскога реда: на пример, како поделити ону знатну количину топлоте коју јетра производи, међу хемијским потенцијалом неопходно потребним животу јетрине ћелије, и потенцијалом који јетра употребљује при испуњавању својих важних и многобројних физиолошких улога?

По Lefèvre-у[1]), од 2250 кал. енергетскога оброка одрасла човека, 750 припадају топлоти термогенезе, т. ј. оној топлоти која се може искључити повисујући температуру средине: остатак од 1500 кал. представља физиолошку енергију. Подела енергетскога оброка (2250 кал.) вршила би се на следећи начин: мишићни тонус 900 кал., јетра 675 кал., остали органи 675 (од којих срце 354).

Несумњиво је да рад срца и мишића апарата за дисање, који се ставља у први ред, кад је питање о употреби физиолошке енергије, представља само један њен мањи део. По Loewy-у и Schrötter-у[2]), срце и апарат за дисање имају у својој служби само 13% енергије коју ставља у промет човек при одмору: 3,6% за срце, 9,4% за апарат за дисање. Према једноме скорашњему раду G. Liljenstrand-а[3]) на апарат за дисање падао би само један готово незнатан део измена организма при одмору: 1—3% само. У Abderhalden-а[4]) налазимо да рад срца троши око 5% енергије коју потребује људски организам: а на другоме месту[5]) следећи рачун: рад срца за 24 ч. = 19.000 кгрм. = 45 кал.; ако се узме да срчани мишић претвара 20% енергије у рад, тада поменутоме раду одговара $45 \times 5 = 225$ кал. од 2500 кал. целокупног енергетскога промета организма, т. ј. 9%.

Видели смо да Lefèvre приписује мишићноме тонусу 60% енергетскога оброка (900 кал. од 2.250). У ствари само један део те вредности може припадати томе тонусу, који ишчезава кад мишић није више под утицајем живчаног система, јер знамо да и без тонуса мишић троши

[1]) op. cit. стр. 909. и 1019.
[2]) Loewy und Schrötter, Untersuchungen über die Blutcirculation beim Menschen. Zeitschr. f. exper. Path. u. Therapie. 1, 197 (1905).
[3]) G. Liljenstrand, Untersuchungen über die Atmungsarbeit. Skandinavische Archiv für Physiologie. 35, 244, 1918.
[4]) Abderhalden, Lehrbuch d. physol. Chemie, III изд. стр. 1340.
[5]) id. Unsere Ernährung.

енергију. Шта више, новији радови на енергетици мишићнога тонуса слажу се у томе, да је мишићни тонус такво стање мишића, у којему овај не изискује никакав вишак енергије. У таквоме је стању, на пример, мишић који држи затворене шкољке мекушаца; јер његове гасовите измене остају исте кад се мењају тегови које држи.[1]) Из радова Frank-a, Gebhardt-a, F. Voit-a, Tangl-a излази, као што закључује F. Verzar[2]), да „у нормалне животиње не постоје у мишићима измене материје, које зависе од живчанога система. Гасовите измене које би биле последица тонуса нису дакле нађене".

Ако је заиста тако, онда би највећи део физиолошке енергије припадао основној биолошкој енергији. Огледи Hill-a[3]) на жаби, у које је топлота калорификовања, наравски, искључена, говоре у томе смислу, јер, по томе физиологу, „производња топлоте у мишића издвојених из тела, почиње високом вредношћу, која је, изгледа, велика као год и производња топлоте живе и нормалне жабе при одмору".

Основна биолошка енергија није дакле само с биолошкога гледишта најважнији део — јер је најприсније везана за живот ћелије — физиолошке енергије, већ изгледа да и у квантитативноме погледу наткриљује остале категорије енергије.

Заузима ли основна биолошка енергија тако широко место у енергетскоме оброку, тада је јасно да она може потицати и из безазотнога горива, угљених хидрата и масти, кад се има на уму да се енергетске потребе организма могу задовољити оброцима у којима је само мањи део калорија представљен беланчевинама. По Lefèvre-y[4]), довољно је да беланчевине буду заступане у оброку са 240 кал. (= 60 гр. беланчевина), док целокупна потреба физиолошке енергије износи, по истоме физиологу, 1490 кал. Али данас је познато да се организам може у огледним погодбама одржавати у азотној и енергетској равнотежи и са мањим количинама азотне хране (Hindhede, Landergreen, Chittenden); поменимо само најновији рад на томе пољу: Abderhalden и сарадници[5]) нашли су да се у човека може добити азотна равнотежа са 4,5 гр. азота дневно, од којих 0,5 гр. отпада на измете; тај азот (4 гр.) представља од прилике 25 гр. беланчевина.

Азотна храна која је некада, а и данас још од необавештенога света, сматрана изузетно „хранљивом", изгубила је у савременој науци много земљишта: организам се може задовољити много скромнијим количинама него што се недавно мислило, и не узимајући у обзир минимуме добивене у више мање неприродним експерименталним погодбама. Сад

[1]) Jakob Parnas, Energetik glatter Muskeln, Pflügers Archiv, 134' 441, 1910.

[2]) Franz Verzar, Der Gaswechsel des Muskels, Ergebnisse der Physiologie 15, 1, 1916.

[3]) A. V. Hill, Die Beziehungen zwischen der Wärmebildung und den im Muskel stattfindenden chemischen Prozessen. Ergeb. der Physiologie 15, 340, 1916.

[4]) op. cit. стр. 904.

[5]) Abderhalden, Ewald, Fodor und Röse, Versuche über den Bedarf an Eiweiss unter verschiedenen Bedingungen, Pflügers Archiv, 160, 511, 1915.

видимо да ни у енергетскоме погледу не можемо приписати беланчевинама неку повлашћену улогу, јер јој ни основна биолошка енергија не припада искључиво.

I.

Пошто смо издвојили категорију енергије која, изгледа, у виших организама одговара енергији коју квас ставља у игру у појави алкохолнога врења у чисто шећерној средини, бацимо сада један поглед на целокупан састав енергетскога оброка у погледу његове судбине при пролазу кроз организам.

У основи се налази основна биолошка енергија, при деловању без престанка у свакој живој ћелији, изван свакога специјалнога функционисања и независно од сваке производње рада.

Затим имамо енергију употребљену на унутрашњи мишићни рад органа вегетативнога живота, неопходно потребног за одржавање живота[1]) (рад срца, диафрагма и т. д.). То је енергија неопходно потребнога мишићнога рада.

На треће место долази категорија енергије, представљена хемијским потенцијалом што га употребљава специјална активност органа, која се не састоји у мишићноме раду (рад бубрега при лучењу, рад цревне апсорпције, рад плућне мембране при хематози). Та се енергија може назвати функциона енергија.

На четвртом месту имамо онај део хемијскога потенцијала енергетскога оброка, који се претвара у организму непосредно у топлоту не одигравајући при томе никакву физиолошку улогу, јер је та топлота последица хемијских трансформација које се збивају у организму у циљу справљања разних тела за њихову доцнију физиолошку употребу. Ту припада топлота развијана у Rubnerovoj „специфичној динамичној акцији" разних алимената, топлота, ма како слаба била, коју ослобађају разне ферментске реакције, топлота ослобађана при трансформацијама резерва и т. д. Разуме се да ће та ослобођена топлота, према приликама, моћи служити као ма која друга топлота произведена у организму, на одржавање његове температуре; али она се не појављује у томе циљу и њена производња не зависи непосредно од калоријске потребе организма. Та енергија трансформација карактеризована је својом физиолошком подчињености хемијским појавама из којих потиче.

Затим долази енергија која служи на производњу мишићнога рада скелетним вољним мишићима. Пошто се тај мишићни рад врши изван

[1]) У ствари подела на мишићни рад који је неопходно потребан и на рад који то није, нема ничега апсолутнога. Рад је срчанога мишића неопходно потребан, али и рад разних мишића апарата за варење такође је потребан дужему нормалноме животу; исто вреди и за бешику и т. д. Најзад, пошто само у истоме смислу може бити говора о потреби вољних мишића, то би тачније било разликовати унутрашњи мишићни рад (т. ј. који се сав на крају крајева претвара у унутрашњости организма у топлоту) од спољашњега, без обзира на њихову већу или мању потребност за одржавање живота.

*

организма, то један део хемијске енергије која га производи излази тим путем из организма. Ту ћемо енергију назвати енергија спољашњега мишићнога рада.

Најзад, у извесним приликама, један део хемијскога потенцијала енергетскога оброка може служити једино на грејање организма. То је дакле једно производњење „топлоте ради топлоте". Та допунска топлота (Lefèvre, chaleur complémentaire; Lapicque[1]), marge da la thermogénèse) ступа на позорницу само онда када топлота која произлази из других категорија хемијскога потенцијала (основна биолошка енергија, енергија обеју врста мишићнога рада, енергија трансформација, функционална енергија) није довољна за одржавање сталне температуре хомеотерма.

Према горе изложеноме, долазимо на следећу поделу хемијскога потенцијала, који је извор свих енергетских манифестација живота хомеотерма:

Допунска топлота,
Чисто физиолошка енергија { Енергија спољашњега мишићнога рада, Енергија трансформација, Функционална енергија, Енергија неопходно потребнога мишићнога рада, Основна биолошка енергија.

II.

Са гледишта упоредне енергетике приметимо следеће о саставу енергетскога оброка:

У виших поикилотерма, јасно је да недостаје само допунска топлота. Треба сићи међу простије створове, да би се наишло на могућност једне различније биоенергетике.

Једноћелијски створ нема такође допунске топлоте. Али што се тиче осталих категорија енергије које нађосмо у хомеотерма, морало би се помислити, на први поглед, да све постоје и у једноћелијских створова. Јер заиста, ови су кадри производити спољашњи механички рад: довољно је сетити се бичева, амебоидних кретања, трепаља инфузорија; затим, свака независна ћелија која расте производи тиме извесан спољашњи рад. Што се тиче унутрашњега механичнога рада, он би био представљен протоплазматским струјањима, пулсатилним вакуолама и др. Имамо доказа о присутности енергије трансформација̂ и у животу једноћелијских створова: на пр., топлота ослобођена при хидролизи сахарозе и малтозе ферментима кваса. Најзад, основна биолошка енергија мора постојати из истога разлога као и у виших створова, а то је: да је лако увидети да једноћелијски створови не могу трошити сав свој енергетски оброк на видљива унутрашња и спољашња кретања. Можемо се чак запитати, као што ћемо видети мало ниже, да ли та основна биолошка енергија не представља једину потребу хемијскога потенцијала једноћелијскога створа и биљке.

[1]) Théorie des substitutions alimentaires isodynames et la valeur nutritive des aliments. Revue scientifique 1909.

У биљке имамо очигледне примере спољашњега рада у разним облицима; рад произведен разним тропизмима и тактизмима, растењем (продирање корена у тврдо земљиште), пуцањем разних плодова, и т. д. Као пример унутрашњега рада споменимо пењање хранљивога сока. Енергија трансформација постоји такође у биљке: довољно је сетити се ферментских појава које мобилишу резерве семена.

Кратко речено, дуж целога низа живих створова налазимо појаве сличне онима међу које поделисмо хемијски енергетски оброк хомеотерма. Али ако је допуштено упоредити пењање течности у биљним судовима са струјањем крви у нашим артеријама, а кретање наших удова с покретима бичева и трепаља једноћелијских створова, то не значи никако да су те појаве упоредљиве и у енергетскоме погледу. У хомеотерма, све појаве међу које поделисмо њихов енергетски оброк потребују енергију у облику хемијскога потенцијала. Нема мишићнога рада, ни мишићнога живота изван рада, ни друге активности разних органа, без употребе хемијске енергије. Све те појаве збивају се на њен рачун.

Несумњиво је, да је организам хомеотерма седиште и многим динамичким појавама које не потребују хемијску енергију: довољно је сетити се осмотских појава. Једна промена температуре, концентрације јона̀, површинскога напона, довољна је за производњу рада без употребе хемијске енергије. Али у сваком случају, енергетске појаве међу које смо горе поделили енергетски оброк потребују све хемијску енергију. Мишићни рад потребује неопходно хемијску потенцијалну енергију, то је експериментална чињеница. С обзиром на степен искоришћавања енергије коју мишић ставља у промет за производњу рада, изгледа да је начелно искључена могућност да би се он могао добити на рачун термичне енергије, ма каквим комбиновањем осмозе, капиларности, дифузије и др., јер би се то косило с другим принципом термодинамике.

Али у једноћелијских створова и биљке не мора бити иста ствар. То јест, могло би бити да у њих динамичке појаве које упоредисмо с појавама хомеотерма, не потребују никако хемијске енергије. Као што примећује Pfeffer[1]), могло би бити да су амебоидна кретања, протоплазматска струјања, произведена променама површинскога напона; а може се претпостављати да је исти случај и за треперење трепаља, шибање бичева, пулсирање вакуола, и да све те појаве бивају на рачун осмотске и капиларне енергије. У кратко речено, насупрот ономе што се збива у мишићноме влакну, овде бисмо имали производњу рада без употребе хемијске потенцијалне енергије; сви видљиви покрети, унутрашњи и спољашњи, једноћелијскога створа били би произведени енергетском игром у којој хемијска енергија не би имала непосреднога учешћа. У једноћелијских створова, или тачније речено у свих оних у којих се мишићно влакно није диференцирало, хемијска енергија игра улогу само у облику основне биолошке енергије, јер знамо искуством да ниједно живо биће, животиња или биљка, не може одржавати свој живот без извеснога промета хемијске енергије.

[1]) Studien zur Energetik der Pflanzen, Abh. der mathem.-physisch. Classe der Königl. Sachsischen Ges. der Wissenschaften, Bd. XVIII, No. 3 Leipzig 1892

Будући да се основна биолошка енергија појављује на крају крајева у организму у својој целини у облику топлоте, а ова може, разуме се, служити на производњу рада посредовањем осмозе, капиларности и т. д., то излази да и тај рад произлази из хемијскога потенцијала којим располаже организам. Али у томе случају хемијска енергија није потребна, јер се топлота коју је она дала може заменити топлотом коју би организам непосредно примио из своје средине, без обзира на порекло те топлоте.

У биљке нарочито имамо многобројне примере рада који постаје без употребе хемијске енергије: многобројна су кретања у биљака произведена испаравањем воде, осмозом, дифузијом, и т. д. Пењање биљнога сока, функцијонисање стомата, рад произведен тургесценцијом, разни тактизми, и т. д. појаве су, које се збивају на рачун других енергија него хемијске. Разуме се, да топлота која постаје из хемијске енергије која је у промету свакога живога створа, па и биљке, може служити на производњу тих појава; али у томе циљу хемијска енергија није потребна, јер, као што рекосмо, и топлота примљена с поља може испунити исту улогу; то се дешава када биљка јако транспирује: њена температура постаје нижа од температуре средине, и на тај начин прима од ове калорије, које се у биљци не разликују од оних које су постале у самој биљци из хемијскога потенцијала.

Производња рада без употребе хемијске енергије, какву видесмо у биљака, може се сматрати енергетском појавом мање присно везаном за живот, од производње рада која захтева апсолутно хемијску енергију, као што је случај са мишићним влакном. Стога је у биљној физиологији лакше подражавати већину динамичких појава, које се посматрају у биљака, него ли у животињској физиологији, где је мишић главни трансформатор енергије.

Из тих размишљања о „упоредној енергетици“ допуштено је, мислим, закључити: да је само основна биолошка енергија поуздано присутна у животу свих створова. Сви живи створови, биљке или животиње, изван сваке производње рада, потребују хемијску енергију, било да је добивају споља, било да је, као што то чини зелена биљка, граде сами уздижући светлосну енергију на ступањ хемијске енергије. Та хемијска енергија, која не производи никакав рад а коју стављају у игру, мишић који се не контрактује, жлезда која не лучи, која, изгледа, не служи ни на шта, општа је, заједничка је категорија енергије у свих живих створова; а вероватно да је једина заједничка. Што се пак тиче осталих категорија хемијскога потенцијала, које нађосмо у виших животиња, могло би бити да се не налазе у најнижих створова и у биљака. Тек појавом мишићнога влакна, створ би стекао моћ да производи рад механизмом који потребује енергију у вишему облику, т. ј. у облику хемијскога потенцијала, док без тога енергетскога трансформатора, живи створови би производили рад механизмима који употребљују деградовану енергију — топлоту.

По тој хипотези живи су се створови еволуцијом и енергетски усавршили: поделом рада, стекли су елементе прилагођене на производњу механичкога рада, који, да би могли испунити своје многобројне и сложене физиолошке улоге, захтевају и енергетски материјал више каквоће: хемијску енергију.

III.

У посебноме случају кваса, видели смо да тај организам, изван сваке појаве растења и производње рада, троши, према потребама виших организама, огромне количине хемијске енергије. Уз то, енергетски оброк нема све оне промене које нађосмо у виших организама: допунска топлота и спољашњи рад зацело не постоје; врло је вероватно, затим, да унутрашњост квасне ћелије није седиште какве знатне производње механичкога рада, који би одговарао енергији унутрашњега мишићнога рада и органске активности. Према томе, у енергетици кваса остале би ове категорије: основна биолошка енергија и енергија трансформација. Када квас превире сахарозу, на пример, енергија ослобођена хидролизом тога дисахарида припада енергији трансформација; ова представља само мали део енергије коју тај шећер даје превирући (3,1 : 59,9), тако да претпоставивши да се енергија трансформација састоји само у тој топлоти инверсије сахарозе, више од 90% енергије коју квас ослобоћа превирањем тога шећера, припадало би основној биолошкој енергији, а у случају гликозе, целокупност ослобоћене енергије. Основна биолошка енергија кваса имала би дакле, према тој категорији енергије виших створова, несразмерно велику предност. А изгледа да исто важи и за друге микроорганизме[1]) (Proteus vulgaris, Bact. pyosyaneum, V. cholericus, B. diphtericum, Bact. coli, B. thermophilum), чије би енергетске измене биле, по своме интензитету, сличне изменама кваса. Треба приметити да о томе предмету немамо довољно података за друге микроорганизме осим кваса.

Протоплазма кваса који се налази у шећерноме раствору седиште је дакле једног несразмерно већег енергетскога промета него ли протоплазма виших организама на истој температури. Тек мобилишући све своје категорије енергије до крајњих граница њихова интензитета, енергетске измене вишега створа могле би, можда, достићи висину измена квасне ћелије. Тако, узевши врло мала сисара (млад миш) и замисливши да производи знатан мишићни рад и да се налази у средини такве температуре да је, и поред мишићнога рада, приморан производити топлоту у јединоме циљу одржавања своје сталне температуре, (допунска топлота), „моћ трошења најмањега сисара могла би достићи на исти степен као и у кваса“.[2]) Али је јасно да се у томе случају виши организам не налази у енергетски упоредљиву стању с организмом кваса.

Дошли смо горе до закључка, да енергија коју квас ставља у игру у раствору чистога шећера, припада готово искључиво основној биолошкој енергији, и видели смо како је огромна разлика између вред-

[1]) Rubner op. cit. стр. 259. Id. Energieumsatz im Leben einiger Spaltpiltze, Arch. f. Hygiene 57, 193, 1906.

[2]) Rubner, op. cit. стр. 258.

ности те категорије енергије у кваса и ћелије виших створова. Ако је тај закључак основан, морамо се запитати шта је узрок тако великој разлици у вредности те категорије енергије, коју сматрамо основном у механизму живота; тим пре, што та разлика иде у корист организама чије су енергетске манифестације врло скучене. Али, да ли је заиста оправдано сматрати енергију коју квас ставља у игру у шећерноме раствору, основном биолошком енергијом какву смо ову дефинисали? Основна је биолошка енергија категорија енергије без које је живот и за један тренутак немогућан: она је присутна у комаду откинута ткива док ово још живи, она је главни узрок те енергетске измене виших створова не могу да спадну испод извесне вредности, коју не смањује ни гладовање до смрти глађу.

Међутим, онај промет енергије кваса у шећерној средини не изгледа да је, у своме интензитету бар, неопходно потребан животу кваса; јер квас може живети, неко доба бар, у одсутству хране и без њега. Врло је вероватно пак да квас може живети и расти у разним хранљивим срединама с много слабијим енергетским прометом него ли у шећерној средини.

У следећим огледима, иста количина кваса стављена је, с једне стране, у шећерни раствор, с друге стране у чисту воду. После извеснога времена упоређују се оба кваса у погледу моћи превирања. У томе циљу, квас који је био у додиру шећера, издвоји се центрифугацијом, пак му се дода шећеран раствор, а другоме квасу одговарајућа количина шећера.

I. оглед.

I. 2 гр 5 кваса + 50 кц воде + 4 гр сахарозе
II. 2 гр 5 кваса + 50 кц воде
температура око 18°

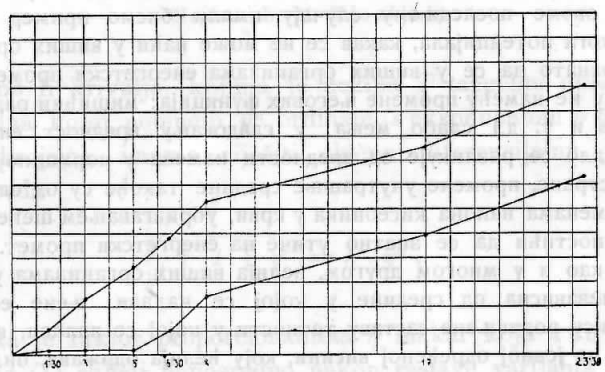
време	произведено CO_2 [1] I.	II.
3 ч 45′	610	45
5 ч 45′	220	0
превирање и даље траје		
19 ч 45′	квас је издвојен центрифугацијом	дода се 4 гр сахарозе
22 ч 30′	165	207
25 ч	142	173

II. оглед.

I. 1 гр кваса + 50 кц воде + 4 гр сахарозе
II. 1 гр кваса + 50 кц воде
температура око 18°

[1]) CO_2 је мерен притиском који развија на један манометар са течношћу. (Види опис у Glasniku hrv. prirod. društva, 1918., стр. 116.)

време	произведено CO_2 [1] I.	II.
1.30	41	7,5
3	90	„
4.30	132,5	„
5	142,5	дода се 4 гр сахарозе
6·30	*49* [2]) 191,5	*38*
8	*88* 230,5	*76*
17	*198* 340,5	*176*
23·30	*298* 440	*271*
36·50	*463* 605	*429*



Оба огледа од којих је други приказан приложеним цртежем, казују да квас у одсутности хране, 20 часова у првоме огледу, 5 часова у другоме, не губи више од своје моћи превирања од кваса који је за све то време био у шећерној средини. Међутим енергетске измене првога кваса морале су бити врло скучене за време гладовања: произведени угљен-диоксид незнатан је, а квас не може зацело у томе случају да извлачи знатне количине енергије другим путем до превирањем својих угљенохидратских резерва. Тај тако ограничени енергетски промет није пак утицао на виталност кваса, бар у колико се може судити о овој по његовој моћи превирања, која је, иако приписивана ферментима, врло осетљива према свему што утиче на животност квасног мехура.

Изгледа дакле да оно изобиље хемијскога потенцијала, које ослобађа живот кваса, а можда и других микроорганизама, не одговара ономе минимуму хемијскога потенцијала који је неопходно потребан животу свакога тренутка, а којим се позабависмо у горњим редовима.

[1]) Док у првоме огледу бројеви назначују произведени CO_2 у свакоме међувремену, у овоме огледу односе се на CO_2 произведен од почетка огледа до назначеног тренутка.

[2]) Курсивни бројеви односе се на CO_2 од почетка другога дела огледа.

То нагло ослобађање енергије, које наступа када се квас стави у шећеран раствор, не представља једну потребу сличну енергетским изменама једнога издвојенога мишића у одмору; према томе, било би важно, у погледу енергетике кваса као и биоенергетике уопште, знати издвојити и мерити минимум енергије потребне животу кваса и других микроорганизама, т. ј. њихову основну биолошку енергију.

Како можемо себи представити ту енергију коју квас ослобађа у познатој изобилности, када се налази у чистоме раствору шећера? Није доказано, премда је вероватно, да тај енергетски промет није од неопходне потребе за растење кваса, али је несумњиво да није потребан квасову животу изван појаве растења; јер се данас зна да квас може живети, неко доба бар, у чистоме раствору шећера, да може производити бујно превирање а да се при томе не множи и да не расте. Према томе, у овоме последњему случају имали бисмо пример расипања енергетскога потенцијала, какав се не може наћи у виших организама. Јер је познато да се у виших организама енергетски промет (ако се организму не намећу промене његових функција: мишићни рад, калорификовање и т. д.) слабо мења: у гладовању вредност енергетских измена мало се разликује од вредности измена у нормалној исхрани. С друге стране, промене унутрашње средине такође су од слабог утицаја: променама напона кисеоника у крви, убризгавањем шећера у вене, неће се постићи да се знатно утиче на енергетски промет. У овоме погледу, као и у многом другом, ћелија виших организама указује се знатно независна од средине у којој се налази: њене енергетске измене нису подчињене саставу течности у којој се налази, већ су регулисане на једној одређеној висини, коју ћелија одржава, било да има да се бори у томе циљу у једноме или другоме правцу. Да ли квасна ћелија не зна за ту енергетску регулацију? Да ли је за интензитет њеногa промета од одсудне важности састав средине у којој се налази? На та се питања не може за сада одговорити, али, судећи по изложеним огледима, могло би се помислити да квасној ћелији недостаје функција енергетске регулације, и да се она у извесним приликама задовољава минимумом енергије, као што у другим приликама расипа хемијски потенцијал. Према томе, енергетски промет квасне ћелије не би био израз њених стварних физиолошких потреба, као што је то случај с ћелијом виших организама, већ израз, тако рећи, једне каталитичке моћи која није физиолошки обуздана.[1]) То је, разуме се, само једна хипотеза, као водиља у изучавању енергетике кваса и микроорганизама уопште.

[1]) Каталитички карактер исхране многих микроорганизама одавно је опажен, тако да је њихов првобитни назив „fermentum“ пренет на неорганизоване катализаторе: „ferments solubles“, ензими или просто ферменти, док се они називају „ferments figurés“ (т. ј. организовани, живи).

Neke metričke relacije kod krivulja u ravnini.

Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 3. juna 1919.

Napisao dr. M. Kiseljak.

Tražimo li krivulje, kojima je dužina T tangente upravno proporcionalna kojoj potenciji y^n ordinate (s eksponentom n pozitivnim cijelim brojem), imamo riješiti običnu diferencijalnu jednadžbu prvoga reda

$$\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = h \,.\, y^n\,, \tag{1}$$

gdje neka je faktor proporcionaliteta h makar koja realna konstanta. Iz (1) slijedi neposredno nakon rastave varijabla

$$x = \int \sqrt{h^2\, y^{2\,(n-1)} - 1}\,.\,dy\,. \tag{2}$$

a) Za $n = 1$ imamo

$$x = \sqrt{h^2 - 1}\,.\,y + K, \tag{3}$$

a to je za $|h| \geqq 1$ jednadžba pravca, dok za $|h| < 1$ ne postoji realno riješenje diferencijalne jednadžbe (1).

b) Za $n = 2$ imamo

$$x = \int \sqrt{h^2\, y^2 - 1}\,.\,dy\,,$$

a odatle slijedi

$$x = \frac{1}{2h}\left\{h\,y\sqrt{h^2\,y^2 - 1} - \ln\left(h\,y + \sqrt{h^2\,y^2 - 1}\right)\right\} + K, \tag{4}$$

a to je transcendentna krivulja s logaritmičkom transcendencijom.

c) Za $n = 3$ imamo

$$x = \int \sqrt{h^2 y^4 - 1}\,.\,dy; \qquad (5)$$

to je eliptičan integral. Radikand nema višestrukih nul-točaka, jer su mu korijeni

$$y_{1,2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{h}}, \qquad y_{3,4} = \frac{\pm i}{\sqrt{h}},$$

pa se taj integral ne može izraziti elementarnim funkcijama. Taj se integral (5)

$$\int \sqrt{h^2 y^4 - 1}\,.\,dy = \frac{1}{h}\int (h^2 y^4 - 1)\,.\,\frac{dy}{\sqrt{\left(y^2 + \frac{1}{h}\right)\left(y^2 - \frac{1}{h}\right)}}$$

supstitucijom

$$y^2 = \frac{1}{h}\,.\,\frac{1}{1-z^2} \qquad dy = \frac{1}{\sqrt{h}}\,.\,\frac{z\,.\,dz}{\sqrt{(1-z^2)^3}} \qquad k^2 = \frac{1}{2} \qquad (6)$$

pretvara u

$$\int \sqrt{h^2 y^4 - 1}\,.\,dy = \frac{1}{\sqrt{2h^3}}\,.\,\int \frac{z^2(2-z^2)}{(1-z^2)^2}\,.$$

$$.\,\frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{2h^3}}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2h^3}}\int \frac{dz}{\left(1-z^2\right)^2\,.\,\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}}\,.$$

Prvi je član s desna eliptički normalni integral prve vrste s modulom $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a drugi je član eliptičan integral treće vrste s parametrom -1, a taj se uopće može izraziti, kako je poznato,

s pomoću eliptičnih normalnih integrala prve i druge vrste i neke algebarske funkcije varijable z; u tom posebnom slučaju otpada povrh toga i eliptični normalni integral druge vrste, pa imamo

$$\int \frac{dz}{\left(1-z^2\right)^2\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}} +$$

$$+ \frac{2z\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}}{3\,(1-z^2)^2};$$

dakle je traženi integral

$$\int \sqrt{h^2 y^4 - 1}\,.\,dy = -\frac{2}{3\sqrt{2h^3}}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}} +$$

$$+ \frac{2z\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}}{\sqrt{2h^3}\,.\,3\,(1-z^2)^2} + K\,.$$

Supstitucijom

$$z = \sin\varphi \qquad (7)$$

i uvođenjem obične kratice

$$\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi$$

dolazimo konačno do jednadžbe

$$3\sqrt{\frac{h^3}{2}}\,x + \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi\,.\,\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} + K_1, \qquad (8)$$

koja predočuje rješenje integrala (5) nakon redukcije toga eliptičnoga integrala.

d) Za $n \geqq 4$ imamo uopće Abelove integrale druge vrste

$$\int \frac{(h^2 x^{2n-2} - 1)\,.\,dx}{\sqrt{h^2 x^{2n-2} - 1}}, \qquad (9)$$

koji se ne mogu algebarski integrirati, jer nisu nultoga roda, a to znači, da algebarske krivulje

$$F(x, y) \equiv h^2 x^{2(n-1)} - y^2 - 1 = 0 \qquad (10)$$

nisu unikurzalne. No i obrnuto, da integrali (9) nisu nultoga roda, to jest algebarske prirode, možemo dokazati iz činjenice, što krivulje (10) nisu unikurzalne. U tom bi naime slučaju morale imati $(2n-3)$ $(n-2)$ dvostrukih točaka, koje su analitički karakterizovane uvjetima

$$\frac{\delta F}{\delta x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\delta F}{\delta y} = 0. \qquad (11)$$

No jer je

$$\frac{\delta F}{\delta x} = 2(n-1) h^2 x^{2n-3} \quad \text{i} \quad \frac{\delta F}{\delta y} = -2y,$$

vidimo, da ne postoje parovi vrijednosti, koji bi ispunjavali jednadžbe (10) i (11), a to znači: Krivulje (10) nemaju nikakvih dvostrukih točaka, dakle su integrali (9) maksimalnoga roda $(2n-3)$ $(n-2)$. To se uostalom vidi gotovo neposredno iz (10), pišemo li tu jednadžbu u obliku

$$y = \pm \sqrt{h^2 x^{2(n-1)} - 1}.$$

Ima li biti dužina tangente konstantna, bit će u (1) $n = 0$, pa iz

$$x = \int \sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1}\, . \, dy = h^2 \int \frac{dy}{y\sqrt{h^2 - y^2}} - \int \frac{y\, dy}{\sqrt{h^2 - y^2}}$$

slijedi

$$x = -h \, . \, \text{ar ch} \frac{h}{y} + \sqrt{h^2 - y^2} + K$$

$$x = -\frac{h}{2} \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - y^2}}{h - \sqrt{h^2 - y^2}} \right| + \sqrt{h^2 - y^2} + C. \qquad (12)$$

dakle i opet transcendentna krivulja s logaritmičkom transcendencijom.

Ako je eksponent n negativan (a to znači, da je dužina tangente obratno proporcionalna s kojom potencijom ordinate), razlikovat ćemo dva slučaja

a) Za $n = -1$ imamo

$$x = \int \frac{\sqrt{h^2 - y^4}}{y^2} \, . \, dy. \qquad (13)$$

Taj nas dakle slučaj vodi opet do eliptičnih integrala; i tu nema radikand višestrukih nul-točaka, jer su mu korijeni

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{h} \quad \text{i} \quad y_{3,4} = \pm i\sqrt{h},$$

pa se stoga integral (13) ne može izraziti elementarnim funkcijama. Taj se integral

$$\int \frac{\sqrt{h^2 - y^4}}{y^2} \, . \, dy = \int \frac{h^2 - y^4}{y^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(h + y^2)(h - y^2)}}$$

supstitucijom

$$y^2 = h(1 - z^2) \quad k^2 = \frac{1}{2} \quad dy = -\sqrt{h} \, . \, \frac{z\, dz}{\sqrt{1 - z^2}} \qquad (14)$$

pretvara u

$$\int \frac{\sqrt{h^2 - y^4}}{y^2} dy = -\frac{1}{\sqrt{2h}} \int \frac{2z^2 - z^4}{1 - z^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^2\right)}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2h}} \int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^2\right)}} + \frac{1}{\sqrt{2h}} \cdot$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^2\right)}} - \frac{1}{\sqrt{2h}} \int \frac{dz}{\left(1 - z^2\right)\sqrt{\left(1 - z^2\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^2\right)}}. \qquad (15)$$

Prvi je član eliptički normalni integral druge vrste; drugi član je eliptički normalni integral prve vrsti, a zadnji član je eliptički normalni integral treće vrste. Supstitucijom (7) imamo konačno

$$x\sqrt{2h} = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \frac{\sin^2\varphi \,.\, d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \frac{d\varphi}{(1-\sin^2\varphi)\,.\,\Delta\varphi}. \tag{16}$$

b) $n \leqq -2$. Postavit ćemo $-n = m > 0$, pa imamo

$$dx = \frac{\sqrt{h^2 - y^{2m+2}}}{y^{m+1}} \,.\, dy, \tag{17}$$

a odatle slijedi

$$x \,.= h^2 \,.\, \int \frac{dy}{y^{m+1} \,.\, \sqrt{h^2 - y^{2m+2}}} - \int \frac{y^{m+1} \,.\, dy}{\sqrt{h^2 - y^{2m+2}}}, \tag{18}$$

dolazimo dakle i opet do viših transcendenata, jer je prvi član zdesna Abelov integral treće vrste, a drugi član je Abelov integral druge vrste.

Kao rezultat svih tih računa imamo dakle

1. poučku: *Pravac je jedina algebarska krivulja, kod koje je dužina tangente proporcionalna (bilo upravno, bilo obrnuto) ma kojoj cijeloj potenciji ordinate.*

Tražimo li krivulje, kojima je dužina N normale upravno proporcionalna makar kojoj potenciji y^n ordinate (n cio broj $\geqq 0$), imamo diferencijalnu jednadžbu

$$y\sqrt{1 + y'^2} = h\, y^n, \tag{19}$$

iz koje slijedi

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{h^2 y^{2n-2} - 1}}. \tag{20}$$

a) Za $n = 0$ imamo

$$x = \int \frac{y\, dy}{\sqrt{h^2 - y^2}} \tag{21}$$

ili

$$x = -\sqrt{h^2 - y^2} + K, \tag{22}$$

a to je jednadžba kružnice.

b) Za $n = 1$ imamo

$$y = \sqrt{h^2 - 1} \,.\, x + K, \tag{23}$$

dakle za $|h| \geqq 1$ pravac.

c) Za $n = 2$ dobijemo

$$x = \frac{1}{h} \operatorname{ar\,ch}(h\,y) = \frac{1}{h} \ln\left(h\,y \pm \sqrt{h^2 y^2 - 1}\right) + K. \tag{24}$$

Uvedemo li definicijom

$$\ln k = h \,.\, K$$

novu konstantu integracije k, dobijemo iz (24) jednostavnim računima

$$y = \frac{e^{2hx} + k^2}{2kh\, e^{hx}}, \tag{25}$$

kao eksplicitnu jednadžbu krivulje, kojoj je dužina normale proporcionalna kvadratu ordinate. Specijalno za $h = 1$ imamo

$$y = \frac{1}{2k}\left(e^x + k^2 e^{-x}\right), \tag{26}$$

što se za $k = 1$ pretvara u jednadžbu obične lančanice.

d) Za $n = 3$ imamo

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{h^2 y^4 - 1}} = \frac{1}{h} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(y^2 + \frac{1}{h}\right)\left(y^2 - \frac{1}{h}\right)}}; \tag{27}$$

supstitucijom (6) dobivamo eliptički normalni integral prve vrste

$$x = \frac{1}{\sqrt{2h}} \int \frac{dz}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^2\right)}} + K$$

ili

$$x = \frac{1}{\sqrt{2h}} \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + K. \tag{28}$$

e) Za $n \geqq 4$ slijedi

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{h^2 y^{2n-2} - 1}}. \tag{29}$$

a to je jednostavan Abelov integral Y_0 prve vrste.

Ima li biti dužina N normale obrnuto proporcionalna kojoj potenciji ordinate, bit će n negativno, pa pišemo li $-n = m > 0$, imamo

$$x = \int \frac{y^{m+1} \cdot dy}{\sqrt{h^2 - y^{2m+2}}}. \tag{30}$$

a) Za $n = -1$ slijedi

$$x = \int \frac{y^2 \cdot dy}{\sqrt{(h+y^2)(h-y^2)}};$$

supstitucijom (14) dobivamo

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2h}} \int \frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}} + \frac{1}{\sqrt{2h}} \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}} \tag{31}$$

Prvi član zdesna je eliptični normalni integral prve vrste, a drugi član druge vrste. Supstitucijom (7) dobivamo konačno

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2h}} \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2h}} \int \frac{\sin^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta\varphi} + K. \tag{32}$$

b) $n \leqq -2$, $m \geqq 2$. Iz (30) vidimo, da je to Abelov integral druge vrste, jer je eksponent $m+1$ potencije u brojniku jednak polovici stepena radikanda u nazivniku. Budući da algebarska krivulja

$$F(x, y) \equiv x^{2(m+1)} + y^2 - h^2 = 0$$

nije unikurzalna, ne može se ni taj integral izraziti algebarskim funkcijama. Tako smo dobili

2. poučku: *Pravac i kružnica jedine su algebarske krivulje, kod kojih je dužina normale proporcionalna (bilo upravno, bilo obrnuto) makar kojoj cijeloj potenciji ordinate.*

O Pitagorinim trokutima.

Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 3. juna 1919.

Napisao dr. M. Kiseljak.

Broj Pitagorinih trokuta, kojima hipotenuza nije veća od zadana broja N, može se izračunati načinom, što sam ga upotrijebio na drugome mjestu*) u nekom specijalnom pitanju.

Kako je poznato, u trokutu

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

bar je jedna diferencija $z - y$ ili $z - x$ taki broj, a jer je jednadžba (1) s obzirom na x i y simetrična, ne pravimo nikakovo ograničenje, zamišljamo li baš diferenciju $z - y = 2l$ takom.

Tražit ćemo prije svega sve trokute, kojima je hipotenuza $z \leqq N$, a diferencija $2l$ zadana. Iz

$$x^2 + (z - 2l)^2 = z^2 \tag{1a}$$

slijedi

$$z = \frac{x^2}{4l} + l \leqq N, \tag{2}$$

a odatle

$$x \leqq 2\sqrt{lN - l^2}. \tag{3}$$

Budući da želimo promatrati samo trokute s pozitivnim, od nule različitim mjernim brojevima stranicâ, imamo povrh toga

*) M. Kiseljak, Einige Bemerkungen über Pythagoräische Dreiecke, Glasnik hrv. prirodoslovnog društva, 30 (1918), str. 146.

$$0 < x \leqq 2\sqrt{lN - l^2}. \tag{3a}$$

Pita se sada, koje cjelobrojne vrijednosti x, koje odgovaraju stegama (3a), daju uvrštene u (2) za z cio broj. Budući da $\frac{x^2}{4l}$ mora biti cio broj, jasno je, da smijemo za x uzeti samo taki broj $x = 2m$; zapravo se radi dakle o rješenju kongruencije

$$m^2 \equiv 0 \pmod{l}, \tag{4}$$

a tu valja razlikovati d v a slučaja.

a) $\mu(l) \gtrless 0$; t. j. u broju l nalaze se svi njegovi prim-faktori samo u prvoj potenciji, pa iz (4) slijedi

$$m \equiv 0 \pmod{l}$$

ili dalje

$$x \equiv 0 \pmod{2l}.$$

Takovih brojeva x ima točno

$$\left[\frac{2\sqrt{lN - l^2}}{2l}\right] = \left[\frac{\sqrt{lN - l^2}}{l}\right], \tag{5}$$

a to su brojevi

$$2l,\ 4l,\ 6l, \ldots\ldots, \left[\frac{\sqrt{lN - l^2}}{l}\right] . 2l.$$

No za $x = 2l$ slijedi iz (2) $z = 2l$, što daje „trokut“

$$(2l)^2 + 0^2 = (2l)^2,$$

koji ne odgovara našim zahtjevima, pa ćemo s toga od nađenog broja (5) odbiti još jedinicu, tako da je konačno

$$\left[\frac{\sqrt{lN - l^2}}{l}\right] - 1 \tag{5a}$$

broj Pitagorinih trokuta s hipotenuzom $z \leqq N$, kojima je diferencija $z - y = 2\,l$, a $\mu(l) \gtrless 0$.

b) $\mu(l) = 0$. Kako je iz elemenata teorije brojeva poznato, možemo u tom slučaju rastaviti broj l u produkat potpunog kvadrata q^2 i nekog broja r, u kojemu dolazi svaki prim-faktor samo u prvoj potenciji, dakle $l = q^2 r$, gdje je $\mu(r) \gtrless 0$, to jest q^2 je najveći kvadratni divizor broja l. Tu se dakle radi o rješenju kongruencije

$$m^2 \equiv 0 \pmod{q^2 r}, \tag{6}$$

iz koje slijedi

$$m \equiv 0 \pmod{q r},$$

ili dalje

$$x \equiv 0 \pmod{2q r},$$

a takovih brojeva x ima točno

$$\left[\frac{2\sqrt{l N - l^2}}{2 q r}\right] = \left[\frac{\sqrt{l N - l^2}}{q r}\right], \tag{7}$$

i to brojevi

$$2 q r,\ 4 q r,\ 6 q r,\ \ldots\ldots,\ \left[\frac{\sqrt{l N - l^2}}{q r}\right] \cdot 2 q r.$$

No za $x \leqq 2\,l = 2\,q^2 r$ izilazi $z \leqq 2\,l$, a to daje „trokute“ s katetom $y = z - 2\,l \leqq 0$, koje ne ćemo izbrajati, moramo dakle odbiti broj onih x, koji su $\leqq l$, a tih ima baš q, tako da je

$$\left[\frac{\sqrt{l N - l^2}}{q r}\right] - q \tag{8}$$

traženi broj Pitagorinih trokuta.

Slučaj a) sadržan je u slučaju b), jer je onda $q = 1$; dakle je uopće

$$B(N, 2\,l) = \left[\frac{\sqrt{l N - l^2}}{q r}\right] - q \tag{8a}$$

broj Pitagorinih trokuta s diferencijom $z - y = 2\,l$, kojima hipotenuza z nije veća od broja N.

Promatranje trokuta s lihom diferencijom $z - y = 2\,l + 1$ vodi nas radi

$$x^2 + \{z - (2\,l + 1)\}^2 = z^2 \tag{9}$$

do

$$z = \frac{x^2 + (2\,l + 1)^2}{2\,(2\,l + 1)} \leqq N, \tag{10}$$

iz čega slijedi

$$0 < x \leqq \sqrt{2\,(2\,l + 1)\,N - (2\,l + 1)^2}. \tag{11}$$

Radi se dakle o tom, koje će vrijednosti za x prema stegama (11) davati cijele brojeve

$$z = \frac{x^2}{2\,(2\,l + 1)} + \frac{2\,l + 1}{2}. \tag{10a}$$

Budući da je drugi član $\frac{2\,l + 1}{2} = l + \frac{1}{2}$, mora biti prvi član $\frac{x^2}{2\,(2\,l + 1)} = a + \frac{1}{2}$, gdje je a neki cio broj, dakle

$$\frac{x^2}{2\,l + 1} = 2\,a + 1,$$

a to znači, da traženi x-ovi morajn udovoljavati kongruencijama

$$x^2 \equiv 0 \pmod{2\,l + 1}$$

i (12)

$$x \equiv 1 \pmod{2}.$$

I tu ćemo razlikovati dva slučaja.

a) Za $\mu(2l+1) \gtrless 0$ dobijemo iz (12)

$$x \equiv 0 \pmod{2l+1}$$

i

$$x \equiv 1 \pmod{2}, \tag{12a}$$

a to su brojevi

$$2l+1,\ 3(2l+1),\ 5(2l+1), \ldots\ldots,$$

dakle je

$$B(N, 2l+1) = \left[\frac{2l+1+\sqrt{2(2l+1)N-(2l+1)^2}}{2(2l+1)}\right] - 1. \tag{13}$$

b) Ako je $\mu(2l+1) = 0$, postavimo opet

$$2l+1 = q^2 r \quad \text{i} \quad \mu(r) \gtrless 0.$$

Kongruencije (12) glase u tom slučaju

$$x \equiv 0 \pmod{qr}$$

i

$$x \equiv 1 \pmod{2}, \tag{12b}$$

a ispunjene su brojevima

$$x = qr,\ 3qr,\ 5qr, \ldots\ldots,$$

dakle je

$$B(N, 2l+1) = \left[\frac{qr+\sqrt{2(2l+1)N-(2l+1)^2}}{2qr}\right] - \frac{q+1}{2} \tag{14}$$

traženi broj Pitagorinih trokuta s lihom diferencijom $z-y = 2l+1$, a hipotenuzom $z \leqq N$.

Sad možemo prijeći na glavni zadatak ovih redaka: Neka se nađe broj $\Delta(N)$ svih Pitagorinih trokuta, kojima hipotenuza nije veća od zadana broja N. Kako je uvijek bar jedna od diferencija između hipotenuze i jedne katete taka, sumirat ćemo izraze po formuli (8a) za sve take diferencije $2l$ od $l=1$ do $l = \left[\frac{N}{2}\right]$. Kod toga smo one trokute dvostruko uračunali, kojima su obje diferencije take, a ti su trokuti nastali množenjem s brojem 2 iz onih, kojima je hipotenuza $\leqq \left[\frac{N}{2}\right]$; za to ćemo broj tih trokuta po istoj formuli odbiti, no jer i ovdje činimo opet pogrješku brojeći dva puta trokute, kojima su obje diferencije take, pribrojit ćemo broj trokuta, kojima je hipotenuza $\leqq \left[\frac{N}{2^2}\right]$ itd. sve dotle, dok je $\frac{N}{2^k} \leqq 1$, a to znači, da je

$$k = \left[\frac{\log N}{\log 2}\right].$$

Tako dobivamo formulu

$$\Delta(N) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{\log N}{\log 2}\right]} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{l=1}^{\left[\frac{N}{2^k}\right]} \left(\left[\frac{\sqrt{\frac{n}{2^{k-1}} \cdot l - l^2}}{qr} \right] - q \right). \tag{15}$$

Primjer. $N = 100$.

$$\Delta(100) = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{l=1}^{\left[\frac{100}{2^k}\right]} \left(\left[\frac{\sqrt{\frac{n}{2^{k-1}} \cdot l - l^2}}{qr} \right] - q \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{50} \left[\frac{\sqrt{100\,l - l^2}}{qr} \right] - \sum_{l=1}^{50} q - \sum_{l=1}^{25} \left[\frac{\sqrt{50\,l - l^2}}{qr} \right] + \sum_{l=1}^{25} q +$$

$$+\sum_{l=1}^{12}\left[\frac{\sqrt{25\,l-l^2}}{q\,r}\right]-\sum_{l=1}^{12}q-\sum_{l=1}^{6}\left[\frac{\sqrt{12,5\,l-l^2}}{q\,r}\right]+\sum_{l=1}^{6}q+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\left[\frac{\sqrt{6,25\,l-l^2}}{q\,r}\right]-\sum_{l=1}^{3}q-\left[\frac{\sqrt{3,125-1}}{1}\right]+1=$$

$= 16 - 94 - 69 + 41 + 27 - 17 - 10 + 7 + 4 - 3 - 1 + 1 = 52$, a to su Pitagorini trokuti:

$5^2 = 3^2 + 4^2$
$10^2 = 6^2 + 8^2$
$13^2 = 5^2 + 12^2$
$15^2 = 9^2 + 12^2$
$17^2 = 8^2 + 15^2$
$20^2 = 12^2 + 16^2$
$25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2$
$26^2 = 10^2 + 24^2$
$29^2 = 20^2 + 21^2$
$30^2 = 18^2 + 24^2$
$34^2 = 16^2 + 30^2$
$35^2 = 21^2 + 28^2$
$37^2 = 12^2 + 35^2$
$39^2 = 25^2 + 36^2$
$40^2 = 24^2 + 32^2$
$41^2 = 9^2 + 40^2$
$45^2 = 27^2 + 36^2$
$50^2 = 14^2 + 48^2 = 30^2 + 40^2$
$51^2 = 24^2 + 45^2$
$52^2 = 20^2 + 48^2$
$53^2 = 28^2 + 45^2$
$55^2 = 33^2 + 44^2$
$58^2 = 40^2 + 42^2$
$60^2 = 36^2 + 48^2$
$61^2 = 11^2 + 60^2$
$65^2 = 16^2 + 63^2 = 39^2 + 52^2 = 33^2 + 56^2 = 25^2 + 60^2$
$68^2 = 32^2 + 60^2$
$70^2 = 42^2 + 56^2$
$73^2 = 48^2 + 55^2$
$74^2 = 24^2 + 70^2$

$75^2 = 45^2 + 60^2 = 21^2 + 72^2$
$78^2 = 30^2 + 72^2$
$80^2 = 48^2 + 64^2$
$82^2 = 18^2 + 80^2$
$85^2 = 36^2 + 77^2 = 40^2 + 75^2 = 51^2 + 68^2 = 13^2 + 84^2$
$87^2 = 60^2 + 63^2$
$89^2 = 39^2 + 80^2$
$90^2 = 54^2 + 72^2$
$91^2 = 35^2 + 84^2$
$95^2 = 57^2 + 76^2$
$97^2 = 65^2 + 72^2$
$100^2 = 28^2 + 96^2 = 60^2 + 80^2$.

Traženi broj $\Delta(N)$ možemo i tako dobiti, da zbrojimo broj svih Pitagorinih trokuta, kojima je hipotenuza $\leqq N$, a jedna razlika taka, s brojem svih trokuta, kojima je hipotenuza $\leqq N$, a jedna razlika liha. No jer smo kod toga svaki trokut dva puta brojili, moramo rezultat podijeliti s 2, pa imamo

$$\Delta(N)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{l=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left(\left[\frac{\sqrt{l\,N-l^2}}{q\,r}\right]-q\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\left(\left[\frac{q\,r+\sqrt{2\,(2\,l+1)\,N-(2\,l+1)^2}}{2\,q\,r}\right]-\frac{q+1}{2}\right)\right\}. \quad (16)$$

Ta je formula zgodnija za izračunavanje broja $\Delta(N)$, jer vodi brže do cilja od formule (15).

Primjer. $N = 100$

$$\Delta(100)=\frac{1}{2}\,(166-94+98-66)=52.$$

Prinosi za teoriju hidrodinamike.

(S 9 slika.)

(Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 11. lipnja 1919.)

Napisao pravi član V. Dvořák.

A. O reakciji, kad izlazi voda[1]) na otvor.

Taj je predmet dosada obrađen vrlo slabo, te sam već prije mnogo godina, a i nedavno, nastojao oko toga, da stvar pobliže razjasnim.[2]) Premda je u mojoj raspravi, u „Nastavnom Vjesniku" 1918., po mom mnijenju stvar u glavnom riješena, ipak se može o njoj još raspravljati s drugoga gledišta, a zatim treba ono, što je u literaturi pogrješno, pobliže naznačiti.

Reakcija se može lako izvesti s pomoću stavka o težištu (l. c, 1918.), ali gotovo još laglje s pomoću jednog stavka o veličini gibanja, koji rabi u hidraulici. Kako nije baš lako naći za taj stavak u literaturi zgodan dokaz[3]), držim da ne će biti zališno, ako ovdje navedem dokaz po Basset-u[4]), (već poradi lagljega shvaćanja stavka i njegovih primjena), kojemu je ishodište u D'Alembertovu principu.

Pomislimo naime jednu tvarnu česticu nekog sustava, koji stoji pod utjecajem sila, koje ćemo zvati „djelujuće sile". Ova se čestica radi saveza s drugima ne će slobodno gibati. Neka bude a akceleracija njezina gibanja; sila S, koja bi tu akceleraciju pro-

[1]) Ovdje rabi izraz „voda" kratkoće radi u značenju tekućine.

[2]) Gledaj „Nastavni Vjesnik", Knj. III. str. 268. (1895.) i Knj. XXVII. str. 192., 225. (1918.).

[3]) Love, Enzyklopädie der mathem. Wissensch. Bd. IV, 3 „Hydrodynamik", str. 62. navodi taj stavak bez dokaza.

[4]) Basset, An elementary treatise on hydrodinamics and sound, Cambridge 1890, str. 10. Početak dokaza sam nešto nadopunio.

izvela, da je čestica potpuno slobodna, jednaka je ma; S ćemo zvati „efektivnom" silom. Da pridodamo po D'Alembertu kod svake čestice sile jednaku i protivnu efektivnoj sili, bio bi sustav u ravnoteži. („Negativne efektivne sile su u ravnoteži s djelujućim silama.")

Za pravokutni sustav koordinata rastavimo sve sile istosmjerno s osima. Ako su komponente brzine čestice $m \ldots u, v, w$, to su komponente efektivne sile $m\frac{du}{dt}$, $m\frac{dv}{dt}$, $m\frac{dw}{dt}$; isto tako ćemo „djelujuće sile" rastaviti istosmjerno s osima. Uvjet je ravnoteže, da je zbroj komponenata svih sila za kojigod smjer jednak ništici. Ili za smjer OX

(1) $\sum m\frac{du}{dt}$ = zbroju komponenata djelujućih sila. Slično za os OY i OZ.

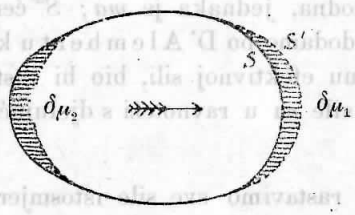
Kod vode razlikujemo dvije vrste „djelujućih sila". Uzmimo stanoviti dio vode, koji nam predočuje sustav čestica. Prvu vrstu sila nam daje obično teža, koja djeluje kroz čitavu masu vode na svaki elemenat voluma. Drugu vrstu sila nam daju tlakovi, koji djeluju na površju na svaki elemenat površja.[1])

Jednadžbu (1) možemo dakle pisati i drukčije. Uopće je $\sum m\frac{du}{dt} = \sum\frac{d(m.u)}{dt}$; no $\Sigma mu = M_x$ je „veličina gibanja" ili „impuls", „momenat"[2]) čitava sustava u smjeru OX. Zatim neka bude zbroj svih tlakova na površju onog sustava istosmjerno s OX jednak P_x, a zbroj ostalih sila prve vrste (teža) neka bude X'; onda dobiva jednadžba (1) oblik

$$\frac{dM_x}{dt} = X' + P_x . \qquad (2)$$

[1]) Tako zvane unutrašnje sile (to su ovdje međusobni tlakovi pojedinih elemenata vode) ne dolaze u račun, jer uvijek svakoj sili odgovara jednaka i protivna; stoga te sile iščeznu na desnoj strani jednadžbe (1).

[2]) Glede izraza „impuls" postoji prilična zbrka. Ako uzmemo poznatu jednadžbu mehanike $\int P\,dt = mv$, zove se umnožak mv obično „veličina gibanja" a $\int P\,dt$ „impuls". Ali dosta često se zove i mv „impulsom"; Englezi to zovu obično „momentum"; tim izrazom ćemo se i mi poslužiti.



Slika 1.

Uzmimo sada u vodi neku nepomičnu plohu S (sl. 1); vodene čestice, koje se u njoj nalaze, imaju za vrijeme t u smjeru OX veličinu gibanja ili momenat $\Sigma mu = M_x$; traže se momenat vode, koja se nalazi u istoj plohi za vrijeme $t + \delta t$. U to vrijeme se nalazi voda, koja je prije bila u plohi S, u drugoj plohi S' (u slici punktirano). Momenat vode u S' za vrijeme $t + \delta t$ neka je $M_x + \delta M_x$. Neka bude momenat šrafiranoga prostora u slici 1. na lijevo $\delta\mu_2$, a na desno $\delta\mu_1$. Momenat vode u nepomičnoj plohi S neka bude $M_x + \delta M'_x$, sve za vrijeme $t + \delta t$; u to vrijeme je dakle momenat vode u punktiranoj plohi S'

$$M_x + \delta M_x = M_x + \delta M'_x + \delta\mu_1 - \delta\mu_2,$$

dakle

$$\delta M_x = \delta M'_x + \delta\mu_1 - \delta\mu_2;$$

uzevši δt neizmjerno maleno, možemo po (2) pisati:

$$\delta M'_x = (X' + P_x)\,\delta t,$$

dakle

$$\delta M'_x = \delta\mu_2 - \delta\mu_1 + (X' + P_x)\,\delta t \qquad (3)$$

ili

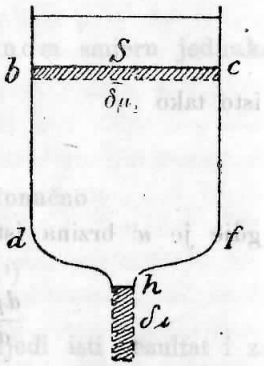
$$\frac{dM'_x}{dt} = \frac{d\mu_2}{dt} - \frac{d\mu_1}{dt} + X' + P_x. \qquad (3a)$$

To dakle znači: prirast momenta u stanovitom smjeru za vodu, koja se nalazi u nepomičnoj plohi S (lijevi dio jednadžbe (3), (3a) polazi

1) od toga, što voda prolazi kroz plohu S, te donosi time u nju neki prirast momenta (prva dva člana desne strane jednadžbe),

2) od učinka sila X' i P_x; P_x su tlakovi, koji djeluju u smjeru OX na površje plohe S, a X' su sile u tom smjeru, koje djeluju na pojedine elemente voluma vode (obično te sile daje teža).

Ovo ćemo sada primijeniti na neke slučajeve reakcije. Neka voda izlazi na otvor u dnu posude (sl. 2); vodeni mlaz se na otvoru malo stegne („contractio venae“). Ploha S neka ide kroz $bcdfh$, gdje je kod h već mlaz stegnut; os OZ neka bude vertikalna. Pretpostavljat ćemo stalno stanje, koje se može polučiti tako, da se gore voda, koja dolazi, uvijek nadoknađuje, ili približno za kratko vrijeme time, da se uzme dolje otvor dosta malen. Onda je veličina gibanja u plohi S stalna, njezin prirast $\delta M'_z$ dakle jednak ništici. Ili prema (3a)



Slika 2.

$$\frac{d\mu_1}{dt} - \frac{d\mu_2}{dt} = Z' + P_z. \qquad (3b)$$

Z' je težina vode u plohi S, P_z su tlakovi na tu plohu u smjeru vertikale. Dakle je P_z = tlaku T_1 na horizontalnu plohu bc, manje tlaku T_2, koji polazi od dna posude, ili

$$P_z = T_1 - T_2, \text{ i}$$

$$Z' + P_z = Z' + T_1 - T_2.$$

No $Z' + T_1$ jednako je težini T ukupne vode u posudi; stoga je

$$Z' + P_z = T - T_1.$$

U miru (dok je otvor začepljen) je tlak na dno u smjeru vertikale jednak težini vode T, u gibanju, kad je otvor slobodan, iznosi taj tlak samo T_1, razlika od T i T_2 nam daje takozvanu reakciju R; stoga je

$$-R = T - T_2 = Z, + P_z.$$

Zatim je $d\mu_2$ veličina gibanja šrafirana prostora gore kod b jednaka brzini w_0 umnoženoj s masom. Ako je masa, koja prolazi gore kroz plohu $b\,c$ u 1 sekundi jednaka m, prolazi u vrijeme dt masa $m\,dt$, dakle je

$$d\mu_2 = w_0\, m\, dt;$$

isto tako

$$d\mu_1 = w\, m\, dt,$$

gdje je w brzina istjecanja (m je dolje isto kao gore). Stoga je

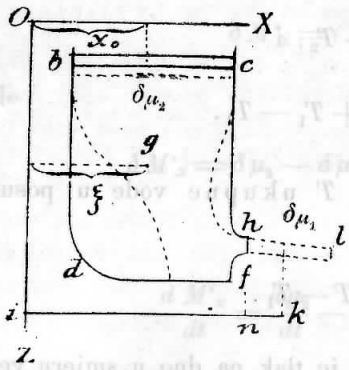
$$\frac{d\mu_1}{dt} - \frac{d\mu_2}{dt} = m\,(w - w_0);$$

dakle reakcija

$$-R = m\,(w - w_0);$$

da je otvor dolje jako malen, mogli bismo brzinu w_0 (prema w) staviti jednako ništici, te bismo dobili

$$-R = m\,w.$$



Slika 3.

Uzmimo još slučaj, gdje se otvor nalazi na strani (sl. 3.), te voda izlazi horizontalno u smjeru osi OX. Tada glasi jednadžba (3a)

$$\frac{d\,M'_x}{dt} = \frac{d\,\mu_2}{dt} - \frac{d\,\mu_1}{dt} + X' + P_x;$$

za stalno stanje je opet $\frac{d\,M'_x}{dt} = 0$; zatim je X' (komponenta teže u horizontalnom smjeru) $= 0$; P_x je rezultanta svih tlakova na plohu S (u slici 3. označenoj s $b\,c\,d\,f\,h$) u horizontalnom smjeru za gibanje, koja nam daje po veličini reakciju R, jer je u miru rezultanta horizontalnih tlakova jednaka ništici. Dakle je

$$P_x = -R,$$

osim toga još je

$$\frac{d\,\mu_2}{dt} = 0,$$

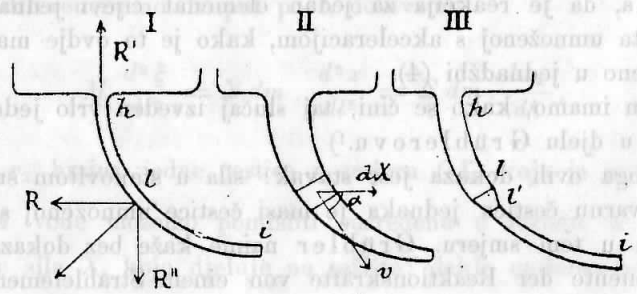
jer je gore kod $b\,c$ brzina u horizontalnom smjeru jednaka ništici. Zatim je

$$d\,\mu_1 = u\, m\, dt,$$

gdje je u brzina istjecanja; zato dobivamo konačno

$$\frac{d\,\mu_1}{dt} = P_x = m\,u = -R.^1)$$

Budući da oblik posude ne odlučuje, vrijedi isti rezultat i za slučajeve označene u sl. 4., I. (cijev jednake širine zavinuta za 90°) i II. (cijev nejednake širine zavinuta za 90°).



Slika 4.

Po stavku o momentu, kako je predočen jednadžbom (3b), možemo lako odrediti reakciju[2]), ali mi ne vidimo, kako u pojedinim

[1]) P_x je sila, koja u horizontalnom smjeru djeluje na vodu; sila ta polazi od bokova posude, no voda djeluje na bokove posude opet silom jednakom i protivnom (po principu reakcije, kojemu u ovom obliku nema prigovora), koja se ovdje zove „reakcijom". I u predašnjem slučaju je sila, koja djeluje na vodu u miru, jednaka ništici (jer nema gibanja), a u gibanju je ta sila $Z + P_z$, što je opet po veličini jednako reakciji, kako je prije protumačeno.

[2]) Prema toj jednadžbi (za OZ i malen otvor) reakcija je u smjeru vertikale za I. i II. jednaka ništici. Za I. se to vidi i ovako: posuda bez cijevi dala bi reakciju prema gore $R' = mv$; vertikalna komponenta centrifugalne sile zavinute cijevi R'' je također $= mv$, dakle je $R' - R'' = 0$.

slučajima ta reakcija nastaje. U mojoj već spomenutoj raspravi od god. 1918. istražio sam u tom pogledu ove slučajeve: 1) kad polazi reakcija samo od promjene smjera brzine, t. j. od centrifugalne sile, što biva kod zavinute cijevi jednake širine (sl. 4., I.); 2) kad polazi reakcija samo od promjene veličine brzine, što biva kod ravne cijevi promjenljiva proreza, na pr. kod koničke cijevi.

Općeni slučaj: zavinutu cijev nejednake širine (sl. 4., II.) kušao sam već 1895. l. c. izvesti direktno (bez pomoći principa o težištu ili momentu), ali bezuspješno. No moglo bi se primijetiti, da je taj slučaj već onda bio potpuno riješen, na pr. u fizici Moussonovoj (Die Physik auf Grundlage der Erfahrung, Zürich 1871.) str. 141., (koju sam onda potanko proučavao), gdje pače imamo jasno naznačenu ulogu centrifugalne sile kod reakcije, zatim rastavljanje akceleracije u centripetalnu i tangencijalnu, u čemu je svakako znatan napredak za razumijevanje reakcije. Samo fali posve tumačenje reakcije za slučaj, gdje se mijenja samo veličina brzine (bez promjene smjera), a osim toga se uzimlje bez dokaza, da je reakcija za jedan elemenat cijevi jednaka masi elementa umnoženoj s akceleracijom, kako je to ovdje malo dalje naznačeno u jednadžbi (4).

Zatim imamo, kako se čini, taj slučaj izveden vrlo jednostavno na pr. u djelu Grüblerovu.[1])

Podloga ovih dokaza jest stavak: sila u stanovitom smjeru za neku tvarnu česticu jednaka je masi čestice umnoženoj s akceleracijom u tom smjeru. Grübler naime kaže bez dokaza: „Die Komponente der Reaktionskräfte von einem Strahlelement (gled. sliku 4., II.) ist (ako je dm masa elementa, v brzina)

$$dX = dm \frac{d\,(v \cos \alpha)}{dt} \text{ u. s. w.} \qquad (4)$$

Bei der stationären Bewegung ist aber

$$dm = m\,dt, \text{ sonach } dX = m\,d\,(v \cos \alpha), \text{ und}$$

$$X = m\,(v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1) \qquad (4a)$$

za čitavu cijev, gdje su $v_1 \cos \alpha_1$ i $v_2 \cos \alpha_2$ komponente brzine u smjeru OX na početku i na svršetku cijevi (ili vodene žice);

[1]) Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, IV Bd, 3; Art. 21. „Theorie der hydraulischen Motoren und Pumpen", 1908, str. 479.

u našem slučaju je $\alpha_1 = 90^0$, $\alpha_2 = 0$. Čini se, sudeći po izrazu „Reaktionskräfte von einen Strahlelement", da je taj zaključak nastao krivom primjenom principa „actio = reactioni", naime tako: sili dX, koja djeluje na elemenat, mora da odgovara sila $-dX$, kojom djeluje opet elemenat na vodu (ako uzmemo vodenu žicu), koja ga zaokružuje; to bi bila dakle ta reakcija; ali sile dX i $-dX$ nemaju kao unutrašnje sile nikakvog učinka na gibanje čitavog sustava, te ne dolaze u račun, ni kad primijenimo princip težišta ni kad primijenimo stavak o momentu.[1])

Kako sam istom nedavno pronašao, može se za prije spomenutu jednadžbu $\Sigma\,dX = X = \Sigma\,dm \frac{d\,(v \cos \alpha)}{dt}$ lako dokazati s pomoću principa o težištu, da znači negativnu reakciju u smjeru OX.

Neka bude apscisa težišta ukupne vode ξ, masa sama M, to je nopće, ako je apscisa jedne čestice dm vode x

$$M\,\xi = \Sigma\,dm\,.\,x$$

Ako diferenciramo dvaput po t, dobivamo

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma\,dm\,.\,\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma\,dm \frac{dv_x}{dt},$$

gdje je v_x brzina jedne čestice u smjeru OX, koja je $= v \cos \alpha$. Masu M vode možemo pomisliti susređenu u težištu, a $M \frac{d^2\xi}{dt^2}$ je dakle sila X, koja djeluje na težište; dakle možemo pisati

$$X = \Sigma\,dm \frac{d\,(v \cos \alpha)}{dt}$$

No sila ta jedino može polaziti od bokova posude, kako je to pobliže razjašnjeno u mojoj spomenutoj raspravi; sila pak, kojom djeluje voda na bokove, jest $= -X$, i to je dakle reakcija.

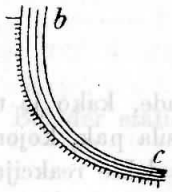
Glavna poteškoća za shvaćanje reakcije za slučaj zavinute cijevi nejednake širine, na kojoj sam i zapeo kod svog prvog istraživanja god. 1895., leži u ovome: uzmimo cijev jednake širine; centrifugalna sila od jednog elementa cijevi dm je $dm \frac{v^2}{r}$, gdje je v brzina

[1]) Gledaj Nastavni Vjesnik 1908. l. c.

i r polumjer krivosti. Uzmimo sada jednako zavinutu cijev koničku, gdje je prorez i brzina na kraju kod izlaza ista kao prije; elemenat dm' neka bude jednake duljine kao dm, no njegov prorez je sada k puta veći od proreza za dm; brzina v' je dakle $= \frac{v}{k}$ i centrifugalna sila $= \frac{dm' \cdot v'^2}{r^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dm\, v^2}{r^2}$, a to je svakako manje od centrifugalne sile za elemenat dm, koja je $\frac{dm\, v^2}{r^2}$. Čini se, da bi prema tomu reakcija od koničke cijevi bila manja od reakcije cijevi jednake širine, a to je krivo. Izlaz iz toga protivuriječja je samo moguć, ako se osvrnemo na reakciju, koja polazi od promjene veličine brzine. Najbolje se to vidi na primjeru označenu s III u slici 4.: od h do l je cijev jednake širine, zatim dolazi posve kratki konički dio ll', i onda opet cijev iste širine, kao cijev hi u I. Deblji komad hl u III dao bi manju reakciju od jednako dugog komada hl u I, ali zato još imamo u III reakciju u kratkom koničkom komadu ll', koja polazi od promjene veličine brzine; jednostavnim računom se možemo uvjeriti, da je za sva tri komada cijevi reakcija (u horizontalnom smjeru) ista, kao u I.

Glavni razlog, zašto daje II istu reakciju kao I, možemo dakle označiti ovako: u II je reakcija, koja polazi samo od promjene smjera brzine (t. j. od centrifugalne sile) manja od one kod I, ali za to još nadolazi kod II reakcija od promjene veličine brzine, koja taj manjak nadoknađuje.

Proračunavanjem reakcije za zavinutu cijev promjenljiva proreza bavi se opširno Lorenz[1]). Odmah s početka griješi u tome, što uzima kod jedne zavinute vodene žice akceleraciju u smjeru žice (= akceleraciju tangencijalnu) kao akceleraciju totalnu, te iz nje izvodi komponente istosmjerne s osima koordinata OX, OY, OZ.



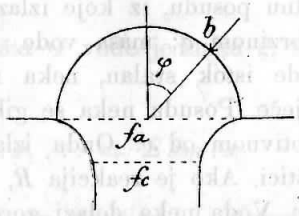
Slika 5.

Da Lorenz zbilja ne sluti ništa o centrifugalnoj sili kod krivocrtnog gibanja, dokazuje njegova bilješka k slici 80. na strani 131. (naša slika 5.), koja označuje slobodnu struju bc vode, koja ide preko zavinute plohe; on naime kaže „... es

[1]) Technische Hydromechanik 1910, str. 124. „Der Druck eines Flüssigkeitstromes gegen ruhende Gefässwände".

bleiben nur noch die Bewegungswiderstände als Ursache der Wechselwirkung zwischen der unter Atmosphärendruck strömenden Flüssigkeit und der festen Wand übrig (!)"[1])

Proračunavanjem reakcije za različite slučajeve bavi se također I. Hermanek u opsežnoj raspravi.[2]) Budući da Forchheimer (gled. dolje) njegov glavni rezultat navodi bez primjedbe, moram se ovdje na princip njegove metode pobliže osvrnuti. Uzmimo na primjer, da voda izlazi na okrugao otvor u velikoj horizontalnoj ravnini, koja sačinjava dno posude. Ima se odrediti „reakcija", ova je jednaka „akciji". Akciju određuje Hermanek ovako: neka ima otvor plohu f_a (sl. 6); visina vode iznad otvora neka bude h, onda otpada na otvor hidrostatički tlak (ako uzmemo specif. težinu = 1) $f_a h$. Zatim je uslijed gibanja tlak u blizini otvora manji; ako je brzina v, umanji se visina h, koja mjeri tlak u miru, za $\frac{v^2}{2g}$ (Nijemci za to imaju izraz „Geschwindigkeitshöhe"). Hermanek opisuje pô kugle iznad okruglijeg otvora, te uzimlje, da su brzine čestica svuda okomite na površju te kugle (vrijedi samo približno)[3]), međusobno jednake (ne vrijedi ni približno), i jednake $\sqrt{2gh}$ (ne vrijedi ni približno radi stegnuća mlaza, istom na stegnutom prorezu mlaza f_c je brzina = $\sqrt{2gh}$).



Slika 6.

Uzmimo sada točku b (sl. 6.); tamo zatvara brzina s normalom kut φ; dakle treba umnožiti v sa $\cos\varphi$ u izrazu $\frac{v^2}{2g}$, koji je onda $\frac{v^2 \cos^2\varphi}{2g}$.

[1]) Čini se, da Lorenz još pravi druge pogrješke, tako na pr. znači kod njega Fx na str. 126. nešto drugo nego malo kasnije na str. 127.; za mene su njegovi izvodi u toj stvari posve nejasni.

[2]) Sitzungsber. der Wiener Akad. 112 Bd. IIa, 1903., str. 879. „Theorie des freien Ausflusses von Flüssigkeiten aus Mündungen und Überfällen"; on nigdje ne navodi radnje svojih predšastnika; čini se, da je na njega utjecao Hagen u svome „Lehrbuch der Wasserbaukunst" 3. Aufl. 1869./70. (koji nisam imao na uvid, sudeći po referatu u hidraulici od Forchheimera, str. 398. (Encyklop. der math. Wissensch. IV, 20).

[3]) Rečenice u zagradama su moje primjedbe.

Ako sada načinimo za čitavu polutku sredik h_v od svih $\frac{v^2 \cos^2 \varphi}{2g}$, i umnožimo ga sa f_a, dobivamo onaj dio tlaka, koji otpada uslijed gibanja na okolicu otvora, tako da je sada po Hermaneku akcija $A = f_a h + f_a h_v$. Da je ovaj zaključak posve bez temelja, ne treba valjada dokazivati (učinak otvora zaračunan je dvaput, jedanput korektno s $f_a . h$, a drugi put krivo s $f_a h_v$).

Hermanek je svoje račune o veličini reakcije zato izvodio, da odredi teoretski „stegnuće mlaza".[1]) Za okrugli otvor je doduše dobio svojom krivom metotom dobar broj, ali za neizmjerno dugu pukotinu mu izlazi za stegnuće mlaza $\frac{f_c}{f_a} = 0{,}75$, dok je pravi broj po Kirchoffu $\frac{\pi}{\pi + 2} = 0{,}61$, što Hermanek ne zna.

Još mi je spomenuti jedan način određivanja reakcije s pomoću principa energije, koji se nalazi u djelu Foepplovu.[2]) Pomislimo jednu posudu, iz koje izlazi voda na strani u horizontalnom smjeru s brzinom v; masa vode, koja izlazi u 1. sek. neka bude m. Da bude istok stalan, neka nadolazi gore isto toliko vode, koliko istječe. Posuda neka se giblje horizontalno s brzinom jednakom i protivnom od v. Onda izlazi voda iz otvora s brzinom jednakom ništici. Ako je reakcija R, jest izvršena radnja u 1 sekundi jednaka Rv. Voda neka dolazi gore u posudu s brzinom $= 0$; dolje opet ima, kad ostavlja posudu, brzinu $= 0$. Radnja teže je u 1 sekundi $= mgh = \frac{1}{2} mv^2$ (jer je $v = \sqrt{2gh}$), gdje je h visina vode iznad otvora. Budući da se nije stvorila nikakova kinetička energija, mora da bude $R - mgh = 0$, što daje $Rv = \frac{1}{2} mv^2$, ili $R = \frac{1}{2} mv$. No uistinu je $R = mv$; ovo nesuglasje se tumači time, što voda, koja gore dolazi u posudu, dobiva u 1 sekundi brzinu v, dakle kinetičku energiju $\frac{1}{2} mv^2$, koja opet treba jednaku

[1]) Ako je naime prorez stegnutog mlaza fc i brzina v, reakcija je $R = mv = \frac{v^2 . fc}{g}$, iz koje jednadžbe bi se našlo fc, da je R poznato.

[2]) Vorlesungen über technische Mechanik, I Bd. 1917., str. 382.

radnju, koju vrši sila R.[1]) S toga je $Rv = 2 . \frac{1}{2} mv^2$, što daje $R = mv$. Za slučaj, da posuda miruje, ne može se ovaj dokaz primijeniti[2]); početnik (za kojega su poglavito ovakovi dokazi određeni) bi možda posumnjao, da se reakcija mijenja s gibanjem. No u ovom pogledu se može pokazati na to, da učinak vode na posudu zavisi samo na relativnom gibanju vode prema posudi, za koje se može uzeti, da ostaje bez promjene za ravnomjerno gibanje posude.

Uostalom ne daje i ovaj način određivanja reakcije gotovo nikakova razjašnjenja o pravoj naravi reakcije, svakako manje, nego na pr. princip težišta.

Još bi se moglo pitati, što će nastati, ako se otvor u boku posude, na koji izlazi voda, naglo začepi (sl. 3.). Time se obustavi gibanje vode na desno, a da je posuda obješena poput njihala (i to tako, da se ne može gibati na lijevo), uklonila bi se na desno. Nije teško proračunati veličinu gibanja vode u trenutku, kad se otvor začepi.

Neka bude za vrijeme t apscisa težišta G vode jednaka ξ, to je za težište, kako smo već prije pisali,

$$(5) \qquad M\xi = dm . x_1 + dm . x_2 + dm . x_3 \ldots = \Sigma dm . x$$

Za vrijeme Δt iscuri dolje masa $\Delta m =$ stupčiću hl, a gore fali ista masa Δm; težište ima sad apscisu $\xi + \Delta\xi$ što je opet

$$M(\xi + \Delta\xi) = \Sigma dm . x + \Delta m . x' - \Delta m . x_0$$

x' je apscisa težišta ik od stupčića hl, a x_0 je apscisa težišta od gornjeg Δm. Ako odbijemo gornju jednadžbu od donje, izlazi

$$M . \Delta\xi = \Delta m (x' - x_0);$$

[1]) Masa m vode dolazi gore u posudu s brzinom $= 0$, a dobiva gibanjem posude u 1 sekundi brzinu v; da primijenimo jednadžbu o „momentu" $Pt = mv$, dobili bismo za silu $P = mv$; ako pak primijenimo jednadžbu $Ps = \frac{1}{2} mv^2$, i stavimo za 1 sekundu $s = v$, izlazi. $P = \frac{1}{2} mv$, dakle samo polovinu prema prije; nije ovdje mjesto, da se upuštamo na ovu dilemu.

[2]) Barem ne o ovom obliku.

no $\Delta m = m \Delta t$, ako je m masa, koja izlazi u 1 sekundi; ako uzmemo Δt neizmjerno maleno, možemo pisati

$$M \frac{d\xi}{dt} = m (x' - x_0), \tag{6}$$

gdje je $x' = in$ (ako pomislimo, da posuda dosiže do hf).

Ako diferenciramo (5) po t, izlazi

$$M \frac{d\xi}{dt} = dm \frac{dx_1}{dt} + dm \frac{dx_2}{dt} + dm \frac{dx_3}{dt} + \ldots,$$

no desni dio ove jednadžbe znači veličinu gibanja ukupne vode, jer su $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ ... brzine u_1, u_2 ..., pojedinih čestica u smjeru OX.

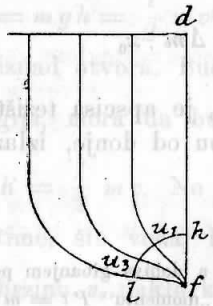
Dakle je konačno

$$\Sigma dm \,.\, u = m (x' - x_0).$$

Lako se vidi, da oblik posude ne odlučuje (u slici 3. je jedan takav oblik označen punktiranjem).

B. Gibanje vode u blizini otvora.

Pomislimo u horizontalnom dnu široke posude malen okrugao otvor. Obično se uzimlje, da idu čestice u pravcima na otvor, te da imaju sve za jednaku daljinu od otvora jednaku brzinu, koja bi onda bila (približno) razmjerna prema kvadratu daljine od otvora (za čestice, koje nisu otvoru preblizu). Ovu je pretpostavku svojim pokusima oborio Tumlirz.[1]) On je učvrstio komadiće aniliske ljubičaste boje u jednakim daljinama na horizontalnu šipku; kad su se stvorile od boje tamne pruge, pustio je vodu na otvor, te pruge fotografirao (sl. 7., ova pokazuje samo polovinu pojava); negativ je projicirao na milimetrički papir u prirodnoj veličini. Pruge



Slika 7.

[1]) Sitzber. der Wiener Akad., Bd. 105, IIa, 1897.; str. 1024. Ovu radnju navodi i Forchheimer, str. 406.

su u daljini od otvora od *18,5 mm* stajale okomito na krugu hl; ortogonalne trajektorije na drugim mjestima nisu više krugovi. Posuda je bila paralelopipedička; visina vode je bila *350 mm*, širina *311 mm*, debljina *94 mm*; otvor je imao promjer *1,43 mm*. Lako se može s pomoću elementarne geometrije odrediti razmjer brzinâ za različite točke ovoga kruga (ako pomislimo sliku neizmjerno malo okrenutu oko osi df; brzina je obratno razmjerna prema prorezu vodene žice). U kosom smjeru su brzine znatno veće; zovimo brzinu gore u posudi U, onda je srednja brzina U_1 za kut od 0^0—$35^1/_2{}^0$ jednaka *7,7 U*, dok je za kut od 63^0—$84^1/_2{}^0$ brzina $U_3 = 18{,}1\ U$, dakle gotovo *2,5* puta veća od U_1. Koji je razlog ovoj velikoj nejednakosti brzine? Čini se, da nema drugog razloga do centrifugalne sile, ali onaj krug se baš nalazi na mjestima krivka, gdje je krivost jednaka ništici („obratne točke“)[1]), gdje dakle nema centrifugalne sile. Ali je ima već prije iznad onoga kruga; no tamo je i brzina i krivost vrlo malena, dakle centrifugalna sila gotovo jednaka ništici. Kasnije u blizini otvora je i brzina i krivost velika, centrifugalna sila dakle znatna, samo je pitanje, da li se utjecaj te centrifugalne sile osjeća i natrag malo dalje od otvora.

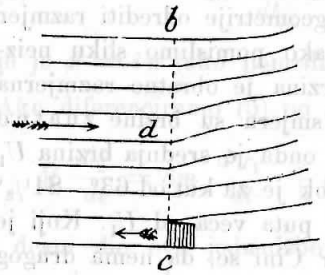
Ovo predašnje se odnosi na brzine čestica, koje nisu blizu otvora. Za čestice u blizini otvora se obično uzimlje, da su njihove brzine ili jednake, ili šta više da su brzine za srednji dio vodenog mlaza veće.[2]) Samo Lamb[3]) kaže, da je u sredini mlaza tlak uslijed centrifugalne sile nešto veći, brzina dakle nešto manja („somewhat less“) od one na površju mlaza. To je jedino mjesto u raspoloživoj literaturi, gdje sam našao spomenut utjecaj centrifugalne sile na pojave kod istoka. Dakako da dosada taj utjecaj nije razjašnjen ni u jednostavnim slučajima, kao što je na pr. ovaj: uzmimo ravnu cijev na pr. kvadratičkoga proreza, iza nje cijev zavinutu u komad

[1]) Tumlirz, Sitzber. der W. Ak., Bd. 126., IIa, 1917., str. 370.; „Stromlinien und Niveauflächen im Ausfluss“. Za struju u dvije dimenzije, koju tamo pisac istražuje, brzina je na obratnim točkama gotovo jednaka.

[2]) Gled. Forchheimera, Hydraulik, str. 397., zatim Neumanna, Einleit. in die theor. Physik, herausgeg. von Pape, 1882., str. 211.

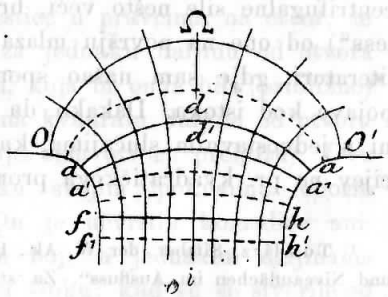
[3]) Hydrodynamics 1895. str. 26. On kaže „the convergiog motion of the elementary streams must make the pressure at the orifice somewhat greater in the interior of the jet than at the surface, where it is equal to the atmospheric pressure. The velocity, therefore, in the interior of the jet will be somewhat less than that given bi $v = \sqrt{2gh}$.“

kružnice i zatim opet ravnu cijev (sl. 8., gdje je samo naznačena prva ravna cijev i komad zavinute cijevi). Čim dođe voda u zavinuti dio, odmah nastaje centrifugalna sila te nagli skok u tlaku; kod c i malo dalje prema d bit će taj tlak positivan; kod b i malo dalje prema d bit će taj tlak negativan, jer čestice tamo nastoje, da se udalje od boka cijevi. Nalijevo i nadesno od točke c može nastati dosta velika razlika tlaka, što bi značilo, da bi morala voda iz šrafirane kockice ići nalijevo, dakle protiv struje, a to je nemoguće. I ako uzmemo, da ne postoji između ravnog i zavinutog dijela cijevi nagli skok u krivosti, već da ima postupni prijelaz, ne bismo tim izišli iz neprilike. Možda bi se našao izlaz iz toga tako, da kažemo, da se uslijed centrifugalne sile prorez žice počevši od d poveća (kako je u slici naznačeno), onda bi se morao na drugoj strani kod b umanjiti. To bi dakle značilo, da se centrifugalnom silom brzina na jednoj strani (gdje je tlak +) umanji, a na drugoj strani (gdje je tlak —) poveća.



Slika 8.

Nije moja nakana, da stvar dalje slijedim[1]), samo ću ovdje još pokazati, kako se može na vrlo jednostavan način dokazati, da mora biti brzina česticâ na periferiji mlaza veća od one u sredini. U slici 9. neka je OO' promjer otvora; mlaz se stegne i neka bude $f\,h$ promjer već stegnutog mlaza. Narišimo približno od oka staze čestica, kako idu na otvor, a to nije teško, jer srednja crta $\Omega\,i$ je pravac, a krajnja ide po površju mlaza. Plohe nivoa stoje okomito na tim crtama, te možemo i lako ortogonalne trajektorije na staze čestica približno narisati. Vidi se na prvi pogled, da dvije



Slika 9.

[1]) Po jednoj nejasnoj bilješci u Forchheimerovoj hidraulici, str. 394. čini se, da neki drže, da nastaje kod ulaza a zavinuti dio cijevi „contractio venae")barem za dosta velike brzine vode).

ovakove susjedne trajektorije, na pr. $a\,d\,\dot{a}$ i $a'\,d'\,a'$ imaju kod a manju udaljenost nego kod d; no brzina je obrnuto razmjerna s onom daljinom $a\,a'$ i $d\,d'$. Stoga je brzina za srednji dio mlaza najmanja, a za površje najveća.

Za slučaj, da izlazi voda na neizmjerno dugu pukotinu (gdje imamo samo dvije dimenzije), proračunao je Tumlirz[1]) za crtu nivoa $O\,\Omega\,O'$, koja ide krajem otvora, brzine, te je našao, da je u vrhuncu Ω brzina samo $41{,}5\%$ od one kod O (za slučaj tamo pobliže opisani). Razlike brzine su svakako znatno veće, nego je slutio Lamb, što se dalo očekivati prema tome, jer je u neposrednoj blizini otvora centrifugalna sila jako velika.

[1]) Sitzber. der Wiener Ak., 1917., str. 368. Tumlirz je već prije isto tamo napisao dvije opsežne matematičke rasprave, i to 1912., str. 745. (Eine Modifikation der Kirschoff'schen Methode der Bestimmung freier Flüssigkeitsstrahlen), zatim 1914. str. 1157., i 1915. str. 391. (Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen; Strahldruck bei senkrechter Strahlrichtung).

О једначини $y'^2 + y^2 = \omega(x)$.

Примљено у сједници разреда математичко-природословнога Југословенске академиње знаности и умјетности дне 10. јула 1919.

Написао др. Сима М. Марковић.

Познато је да сѐ једначина

$$y'^2 + y^2 = \omega(x) \qquad (1)$$

не може уопште интегралити средствима данашње анализе. Како се, међутим, на ту једначину наилази врло често и у проблемима Теоријске и у проблемима Примењене Математике, од увек је било интереса, да се она што боље упозна, па је зато и била предмет врло многих испитивања.

Ја ћу овом приликом истаћи неколике квалитативне појединости о њеним реалним интегралима, на начин, како сам, у својој тези[1]), испитао одговарајуће особине интеграла Riccati-еве једначине, у вези са сличним испитивањем г. Петровића.[2])

Пре свега, већ сама композиција једначине (1) истиче на видик овај резултат: Кадгод је y један интеграл једначине (1), биће њен интеграл и $-y$. Другим речима: у систему кривих линија, дефинисаних једначином (1), увек су две и две од тих линија симетричне према апсцисној осовини.

I. Уочимо једначину

$$y'^2 + y^2 = \omega(x). \qquad (1)$$

Лако се увиђа, да су двоструке нуле интеграла y уједно и нуле функције $\omega(x)$, јер за двоструке нуле мора у исто време бити

$$y = 0 \qquad y' = 0$$

па дакле и

$$\omega(x) = 0.$$

[1]) С. М. Марковић: Општа Riccati-ева једначина првога реда, Београд, 1913.

[2]) M. Petrovitch: Sur l' équation différentielle de Riccati et ses applications chimiques (Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1896).

Двоструке нуле интеграла y, према томе, сталне су.

Лако је, осим тога, увидети из саме композиције једначине (1) и то, да двоструке нуле интеграла y морају уједно бити и двоструке нуле функције $\omega(x)$.

Диференцирајући једначину (1) добијамо

$$2y'y'' + 2yy' = \omega'(x)$$

или

$$2y'' + 2y = \frac{\omega'(x)}{y'}$$

одакле видимо да троструке нуле интеграла y могу бити само нуле функције $\omega'(x)$, јер за троструке нуле интеграла y мора у исто време бити

$$y = 0 \qquad y' = 0 \qquad y'' = 0.$$

И троструке нуле су, дакле, сталне.

Лако је, осим тога, увидети, опет из саме композиције једначине (1), и то да троструке нуле интеграла y морају бити четвороструке нуле функције $\omega(x)$.

На сличан начин налазимо да четвороструке нуле интеграла y могу бити само нуле функције $\omega''(x)$ и уопште: да n-струке нуле интеграла y могу бити само нуле функције

$$\overset{(n-2)}{\omega}(x)$$

где $(n-2)$ означава ред извода.

Према томе, све вишеструке нуле интеграла једначине (1) сталне су.

Посматрајмо, примера ради, једначину

$$y'^2 + y^2 = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 \qquad (2).$$

Једина реална нула функције на десној страни једначине (2) јесте вредност $x = 1$. Интеграл y, према томе, може имати као двоструку нулу само вредност $x = 1$.

Лако је уверити се, да једначина (2) има као један интеграл израз

$$y = x^2 - 2x + 1$$

и он одиста има као двоструку нулу вредност $x = 1$.

Лако се уверавамо и о томе, да је двострука нула $x = 1$ интеграла y једначине (2) уједно и двострука нула функције на десној страни једначине (2).

II. Што се тиче максимума, минимума и хоризонталних превојних тачака интеграла y једначине (1), можемо, простим разматрањем, доћи само до овог резултата: пошто је за максимуме, минимуме и хоризонталне превојне тачке интеграла y увек

$$y' = 0$$

то ће крива

$$y^2 = \omega(x)$$

представљати геометријско место евентуалних максимума, минимума и хоризонталних превојних тачака.

Што се тиче вертикалних превојних тачака, можемо рећи ово: пошто је у вертикалним превојним тачкама увек

$$y' = \infty$$

интеграл y може имати вертикалних превојних тачака на коначној даљини само за оне коначне вредности x за које је

$$\omega(x) = \infty .$$

Ако је, н. пр., $\omega(x)$ ма какав полином по x, ниједан интеграл одговарајуће једначине (1) неће имати на коначној даљини вертикалних превојних тачака; а ако је, н. пр.

$$\omega(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где су P и Q полиноми по x, који немају заједничких нула, онда интеграл y одговарајуће једначине (1) може имати вертикалних превојних тачака само за нуле полинома Q.

III. Испитајмо асимптотне вредности интеграла једначине (1). Напишимо једначину (1) у облику

$$y' = \sqrt{\omega(x) - y^2} . \qquad (3)$$

Пустимо сад да x бескрајно расте и нека функција $\omega(x)$, кад x бескрајно расте, тежи једној коначној и одређеној граници ω_0, т. ј. нека буде

$$\lim_{\text{за } x=\infty} \omega(x) = \omega_0 .$$

Пошто нас за сад интересују само реални интеграли, испитаћемо само случај кад је гранична вредност функције $\omega(x)$ позитивна, т. ј. кад је

$$\omega_0 > 0 .$$

Једначина

$$\omega_0 - y^2 = 0$$

имаће тада реалне корене и нека ти корени буду $+a$ и $-a$.

Корени једначине

$$\omega - y^2 = 0$$

нека буду $+\alpha$ и $-\alpha$.

Корени $+\alpha$ и $-\alpha$ биће, очевидно, извесне функције од x, које ће тежити граничним вредностима $+a$ и $-a$, кад x буде бескрајно расло.

Нека корени α теже својим границама a било опадајући било растући, т. ј. нека је

$$\alpha > a \quad \text{или} \quad \alpha < a .$$

Посматрајмо сад један интеграл једначине (3) који је, за иницијалну вредност x_0, мањи од α. Нека то буде, н. пр. интеграл y. Пустимо сад да x расте од x_0 до $+\infty$ и испитајмо шта ће за то време бити са интегралом y.

Очевидно је из једначине (3) да ће интеграл y, пошто је за $x = x_0$

$$y' > 0$$

одмах почети да расте и продужиће да расте све дотле док буде мањи од α. Међутим, интеграл y не може никад достићи вредност α, јер чим би постао већи од α, извод y' постао би имагинаран, као што то показује једначина (3). Отуда закључујемо да ће интеграл y стално расти, али ће при том остати увек мањи од α. Постојаће, дакле, једна граница којој ће интеграл y тежити, кад x буде бескрајно расло. И та граница мора бити баш вредност a, јер ако би интеграл y тежио некој другој граници a_1, која би била мања од a, једначина

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\omega - y^2}}, \qquad (4)$$

коју изводимо из једначине (3), довела би до једне контрадикције, пошто би десна страна остала коначна, кад би y тежило вредности a_1.

Посматрани интеграл y има, дакле, за границу вредност a.

Уочимо, н. пр., једначину

$$y'^2 + y^2 = \frac{16 + 16x^2(x-1)^2}{(x-1)^4}, \qquad (5)$$

и потражимо асимтотну вредност једнога њенога интеграла y.

У овом случају је

$$\omega(x) = \frac{16 + 16x^2}{(x-1)^2(x-1)^4}$$

$$\lim_{\text{аа } x=\infty} \omega(x) = \omega_0 = 16$$

па ће зато бити

$$a = 4.$$

Отуда закључујемо да ће се посматрани интеграл y једначине (5), кад x бескрајно расте, бескрајно приближавати вредности 4.

Да бисмо се уверили о тачности овога закључка, довољно је само да напоменемо, да је један интеграл посматране једначине (5)

$$y = \frac{4x}{x-1}.$$

Посматрајмо, примера ради, и једначину

$$y'^2 + y^2 = \frac{x^2+1}{x^4}. \tag{6}$$

Сада је

$$\omega(x) = \frac{x^2+1}{x^4}$$

$$\lim_{\text{за } x=\infty} \omega(x) = \omega_0 = 0$$

па ће бити и

$$a = 0.$$

Одатле закључујемо, да ће се посматрани интеграл y, кад x бескрајно расте, асимтотно приближавати апсцисној осовини. Овај резултат је лако верификовати, кад се има у виду, да је један интеграл посматране једначине (6)

$$y = \frac{1}{x}.$$

IV. Уочимо једначину (1) написану у облику

$$y' = \sqrt{(\sqrt{\omega}+y)(\sqrt{\omega}-y)}. \tag{7}$$

Претпоставимо да је функција $\omega(x)$ у размаку $(0, \alpha)$ позитивна и да не опада, и посматрајмо интеграл y једначине (7), који постаје раван нули за $x = 0$.

За њега можемо доказати овај резултат: за све вредности x у размаку $(0, \alpha)$ интеграл y је позитиван и непрестано расте, али не достиже никад вредност $\sqrt{\omega}$.

Пре свега, интеграл y не може ни почети да опада, јер би тада био негативан, а његов први извод y' позитиван. Како функција ω не постаје равна нули за $x = 0$, за ту вредност x, пошто је $y = 0$, биће, ако са y'_0 означимо вредност првога извода интеграла y у тачки чија је апсциса $x = 0$,

$$y'_0 = \sqrt{\omega(0)},$$

па како је, према претпоставци,

$$\omega(0) > 0,$$

интеграл y, пошто постаје раван нули за $x = 0$, расте почевши од $x = 0$ и остаје, према томе позитиван. Али, растући, интеграл y не може никако превазићи, па ни достићи одговарајућу вредност функције $\sqrt{\omega}$, јер чим би је прешао извод y' постао би имагинаран, као што се види из једначине (7).

Ако за размак $(0, \alpha)$ узмемо размак $(0, \infty)$ и ако функција $\sqrt{\omega(x)}$ у том размаку асимтотно тежи једној коначној и одређеној граници a, интеграл y такође ће асимтотно тежити тој истој граници. Јер, како интеграл y непрестано расте, а не може, према пређашњем, никако да превазиђе вредност a, извод y' тежиће нули кад x бескрајно расте; што значи, према једначини (7), да интеграл y асимтотно тежи граници a; резултат који смо већ извели раније, кад је било речи о асимтотним вредностима интеграла проучаване једначине.

V. Посматрајмо две једначине

$$z'^2 + z^2 = \omega_1(x) \tag{8}$$

$$t'^2 + t^2 = \omega_2(x). \tag{9}$$

За функције ω_1 и ω_2 претпостављамо, да су у посматраном размаку $(0, \alpha)$ позитивне и да не опадају.

Ако је, осим тога, у размаку $(0, \alpha)$, непрестано задовољен услов

$$\omega_1 > \omega_2 \tag{10}$$

биће такође у том размаку и

$$z > t,$$

где су z и t интеграли једначина (8) и (9) који постају равни нули за $x = 0$.

Пре свега, из једначина (8) и (9), према услову (10), добивамо неједначину

$$z'^2 + z^2 > t'^2 + t^2, \tag{11}$$

коју можемо написати и у облику

$$z'^2 - t'^2 > t^2 - z^2. \tag{12}$$

Ако би сад за једну вредност x, блиску вредности $x = 0$, било

$$t > z,$$

морало би у исто време бити, према неједначини (12), и

$$z' > t'$$

или

$$\frac{d}{dx}(z - t) > 0.$$

То значи, да диференција $z - t$ расте почевши од те вредности x. Па како је она за $x = 0$ једнака нули, морало би, почевши од $x = 0$, бити

$$z > t,$$

што је у контрадикцији са претпоставком.

С друге стране, опет, да би диференција $z - t$ могла постати негативна почевши од извесне вредности b што се налази у размаку $(0, \alpha)$, треба да се најпре сведе на нулу за $x = b$, па пошто би, према малопређашњем, почевши од $x = b$ диференција $z - t$ морала расти, наилазимо опет на контрадикцију, чиме је горњи резултат доказан.

VI. Нека су дате три једначине

$$z'^2 + z^2 = \omega_1(x), \tag{13}$$

$$y'^2 + y^2 = \omega(x), \tag{14}$$

$$t'^2 + t^2 = \omega_2(x). \tag{15}$$

За функције ω_1, ω и ω_2 претпоставићемо опет, да су у посматраном размаку $(0, \alpha)$ позитивне и да не опадају.

Ако је, осим тога, у томе размаку, непрестано задовољен услов

$$\omega_1 > \omega > \omega_2$$

биће у исто време, у томе размаку, и

$$z > y > t$$

где су z, y и t интеграли једначина (13), (14) и (15), који постају равни нули за $x = 0$.

Овај резултат је, очевидно, непосредна последица резултата доказаног у одељку V.

Последњи резултат може имати корисну примену у приближној интеграцији једначине облика

$$y'^2 + y^2 = \omega(x).$$

Ако, н. пр., треба да проучимо у размаку $(0, \alpha)$ једначину (14), коју не можемо интегралити, онда ћемо за компаративне једначине (13) и (15) изабрати такве једначине, које или можемо интегралити, или бар о чијим интегралима можемо имати довољно потребних података. На тај начин ћемо добити и податке о границама, између којих се непрестано, у посматраном размаку $(0, \alpha)$, налази проучавани интеграл y.

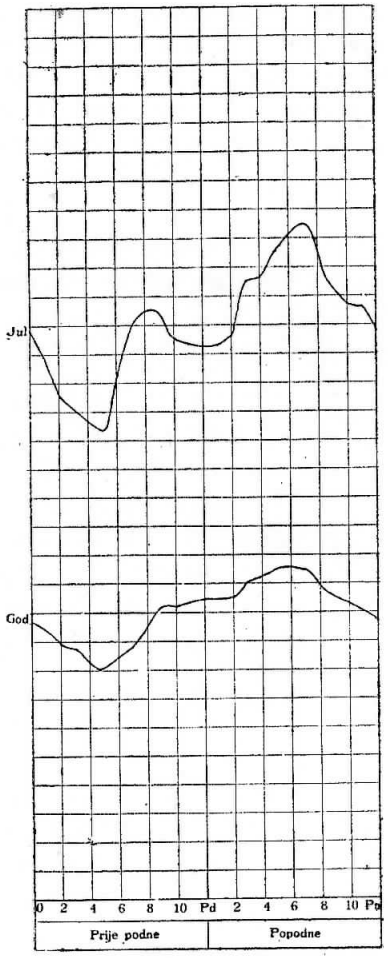
Очевидно је да ћемо интеграл y толико боље познавати, колико компаративне функције ω_1 и ω_2 буду тешње обухватале функцију ω.

Vidi radnju: Dr. Andre Gilić.

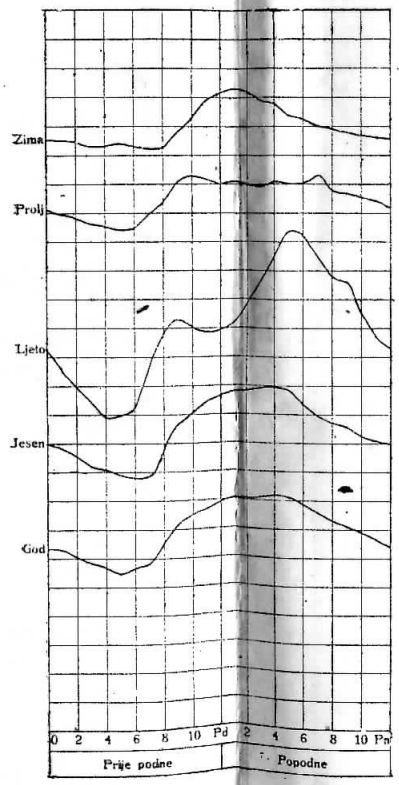
Karta I.

Dnevni tok tlaka pare

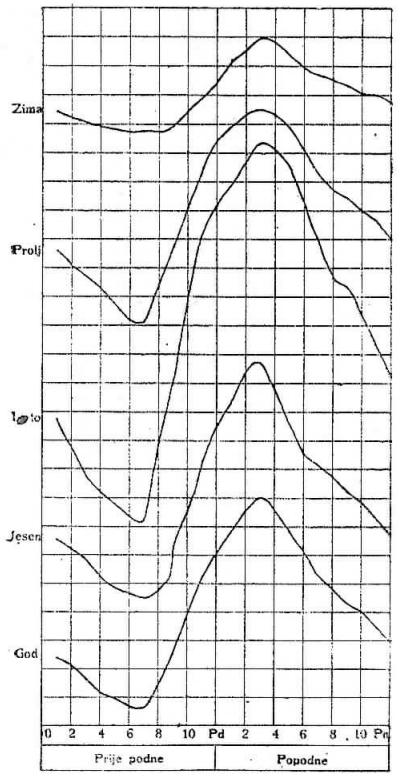
[1 pars = 0,2 mm.]



Tragöß



Bucheben

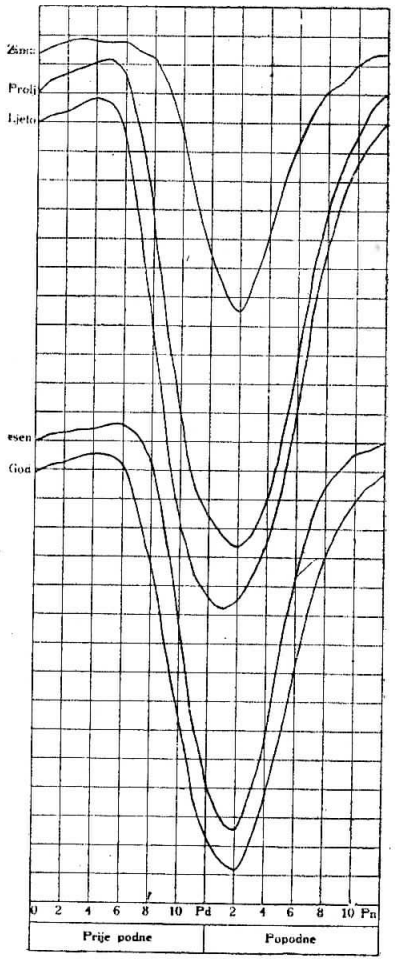


Kremsmünster

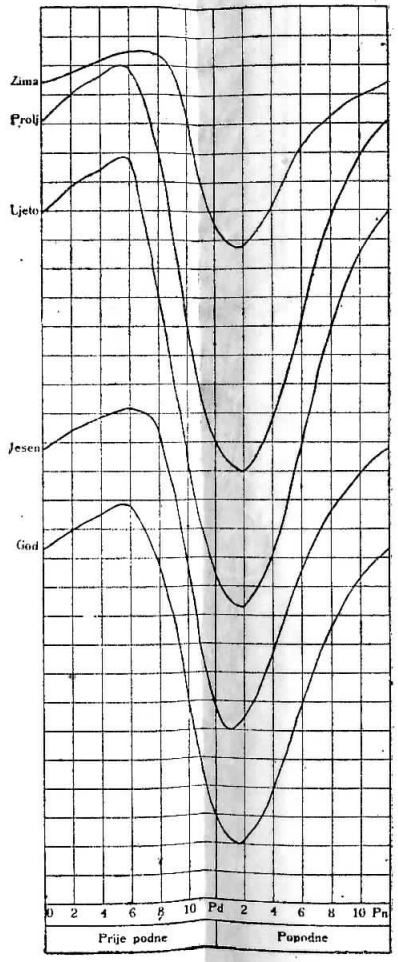
Tabla II.

Dnevni tok relativne vlage

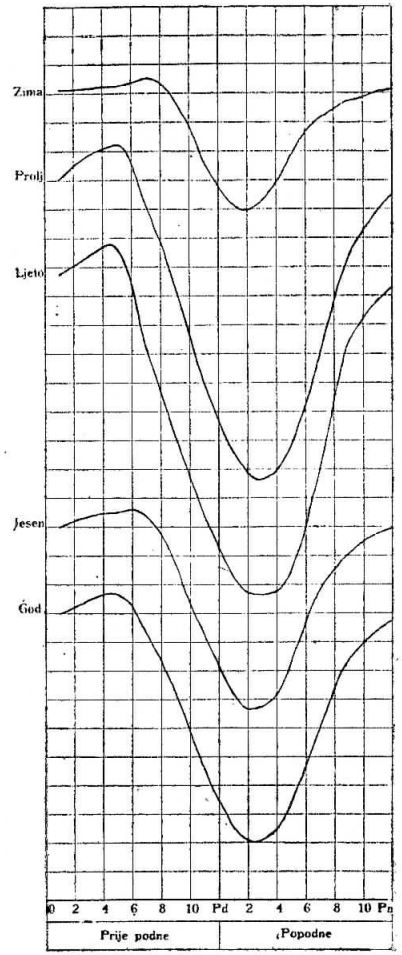
[1 pars = 2%]



Tragöß



Bucheben



Kremsmünster